Ecuaciones Diferenciales curso 2006

Lista de ejercicios n.1

1. Determinar cuales de las siguientes ecuaciones funcionales son ecuaciones diferenciales.

    (a) $\dot{x}(t) = a(t) + b(t)x(t) + c(t)[x(t)]^2$

    (b) $\dot{x}(t) = t^{-2}x(t)$

    (c) $t\ddot{x}(t) = [x(t)]^2$

    (d) $\dot{x}(t) = x(t+1)$

    (e) $\dot{x}(t) = \int_0^t \{1 + [x(s)]^2\}\, ds$

    (f) $x(t) = \int_0^1 \{[\dot{x}(s)]^2 + [x(t)]^2\}^{1/2}\, ds$

    Observar que toda solución de la ecuación (e) verifica la ecuación diferencial $\ddot{x}(t) = 1 + [x(t)]^2$ pero no recíprocamente.

2. Sea $\dot{x} = f(x)g(t)$ una ecuación de variables separables; demostrar que, si la ecuación no es $\dot{x} = 0$ (en cuyo caso todos los puntos son de equilibrio) entonces los puntos de equilibrio son exactamente los ceros de f. Hallar los puntos de equilibrio y resolver, las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

$$\dot{x} = x^2 - 1 \qquad \dot{x} = \frac{1}{t^2 - 1} \qquad \dot{x} = x^2 cos\, t \qquad \dot{x} = a(t)x$$

3. Hallar todas las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = x^{1/2}$.

4. Ecuación de **Bernoulli**. Probar que el cambio de variable $y = x^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli

$$\dot{x} = a(t)x^n + b(t)x\ , \qquad n > 1$$

    a una ecuación diferencial lineal, y por lo tanto es soluble por cuadraturas. Supongamos que la solución $x(t)$ que buscamos verifica $x(t_0) = 0$ para algún instante $t_0 \in \mathbb{R}$; resulta entonces que el cambio de variable anterior no puede efectuarse. Remediar este inconveniente utilizando el teorema que asegura la unicidad de las soluciones. Resolver la ecuación diferencial

$$-2\dot{x} = tx^3 + x \ .$$

5. Llamamos ecuación de **Riccati** a toda ecuación de la forma :

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

Observar que si $a = 0$ la ecuación es lineal y que si $c = 0$ la ecuación es de Bernoulli.

(a) Supongamos que $x_1 = x_1(t)$ es una solución particular de la ecuación de Riccati. Probar que entonces toda solución $x = x(t)$ definida sobre el mismo dominio que x_1 difiere de x_1 en una solución de una ecuación de Bernoulli cuyos coeficientes dependen de las funciones a, b y x_1.

(b) Resolver la ecuación diferencial $\dot{x} = x^2 - 2x - t^4 + 2t + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.

(c) Sea $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ una ecuación diferencial lineal cuyos coeficientes (las funciones a y b) son continuos y están definidos en $\mathbb{R}$. Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones. Demostrar que toda otra solución se escribe $\varphi = \varphi_1 + C(\varphi_2 - \varphi_1)$.

(d) Supongamos que x_1, x_2 y x_3 son tres soluciones de la ecuación de Riccati. Utilizando las partes anteriores hallar una expresión para una solución arbitraria en términos de las tres soluciones conocidas.

6. Para las ecuaciones del ejercicio (2) hallar, en función de la condición inicial (t_0, x_0), el intervalo maximal de definición de la solución correspondiente. Representar gráficamente dichas soluciones.

7. Sean f_1 y f_2 dos funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f_1(t, x) \leq f_2(t, x)$. Demostrar que, si $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_1(t, x)$, $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_2(t, x)$, y además existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ entonces se cumple que $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$ mayor que t_0. ¿Qué ocurre si $t < t_0$?

8. Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que toda solución maximal de la ecuación $\dot{x} = t^2 + x^2$ está definida en un intervalo acotado.

9. Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(t + x)$. Probar que todas las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las mismas.

10. Estudiaremos ahora cualitativamente la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$.

(a) Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.

(b) Demostrar que para toda solución $\varphi = \varphi(t)$ existe un instante $T \geq 0$ (que depende de φ) tal que $\varphi(t) < \sqrt{t}$ para todo $t > T$.

(c) Llamamos ahora φ_c, para cada $c \in \mathbb{R}$, la solución maximal que verifica $\varphi_c(0) = c$. Probar las siguientes afirmaciones: Si $c \geq 0$ entonces φ_c está definida para todo $t > 0$; existe $k < 0$ tal que para todo $c < k$ la solución φ_c tiende a $-\infty$ en tiempo finito; por último, probar que existe un único valor c_0 tal que φ_{c_0} está definida para todo $t > 0$ y $\lim_{t\to+\infty}(\varphi_{c_0}(t) + \sqrt{t}) = 0$.