Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Complejo–Curso 2006

Práctico 5

1. **La fórmula de Cauchy.**

   a) Sea γ el cuadrado de vértices $\pm 2 \pm 2i$, recorrido en sentido antihorario. Calcular:

   (a) $\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-\pi/2}dz$; (b) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$; (c) $\int_\gamma \frac{z\,dz}{2z+1}$;

   (d) $\int_\gamma \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}dz$, $x_0 \in (-2,2)$; (e) $\int_\gamma \frac{\mathrm{ch}\, z}{z^4}$.

   b) Probar que las siguientes funciones son holomorfas en Ω, y calcular sus valores:

   1) $f(z) = \int_\gamma \frac{2\xi^2-\xi-2}{\xi-z}d\xi$, donde $\gamma : \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

   2) $f(z) = \int_\gamma \frac{\xi^3+2\xi}{(\xi-z)^3}d\xi$, donde $\gamma : |z-2| = 1$ recorrida en sentido positivo, y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

   3) $f(z) = \int_\gamma \frac{\xi-\bar{\xi}}{\xi+z}d\xi$, donde $\gamma : \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\Omega = -(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$.

2. Probar que $\mathbb{D} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{D}$, no es conformemente equivalente al anillo $A_R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$, para $R > 1$.

   (Sugerencia: si $f : \mathbb{D} \setminus \{z_0\} \to A_R$ es una equivalencia conforme, discutir según el tipo de singularidad que f tiene en z_0).

3. Hallar todas las biyecciones holomorfas de la esfera de Riemann S^2 .

4. Probar el *principio del mínimo*: si Ω es una región y $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ no tiene ceros en Ω, entonces $|f|$ no tiene mínimos locales en Ω, a menos que f sea constante.

5. Sean $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Probar que para todo $r > 0$ tal que $D(a,r) \subseteq \Omega$ existen $z_r, \omega_r \in D(a,r)$ tales que $z_r \neq \omega_r$ y $f'(a) = \frac{f(\omega_r)-f(z_r)}{\omega_r - z_r}$ (Sugerencia: considerar la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z) - f'(a)z$).

6. Sea $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, donde Ω es una región. Probar que f es constante en Ω sii alguna de las funciones siguientes lo es: $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, $\arg(f)$, $|f|$.

7. Hallar el número de soluciones en $\mathbb{D}$ de las siguientes ecuaciones: (a)$z^9-2z^6+z^2-8z = 2$; (b) $2z^5 - z^3 - 3z^2 - z + 8 = 0$; (c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$; (d) $\exp z - 4z^n + 1 = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

8. ¿Cuántas soluciones de la ecuación $z^4 - 8z + 10 = 0$ están en $\mathbb{D}$? ¿Y en el anillo $1 < |z| < 3$?