Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Complejo–Curso 2006

PRÁCTICO 4

1. Hallar todas las funciones enteras que sobre el eje real coincidan con $\varphi(x) = 2x + 1$.

2. Sean $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, funciones sin ceros en $\mathbb{D}$. Si $\frac{f'}{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$; mostrar que $f = kg$ para algún $k \in \mathbb{C}$.

3. Mostrar que si Ω es una región y $f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ son tales que $fg = 0$, entonces $f = 0$ o $g = 0$. En otras palabras, $\mathrm{Hol}(\Omega)$ es un dominio de integridad.

4. Hallar las multiplicidades de los ceros de las funciones siguientes: $\tan z$, $\exp 2z + \exp z$, $(z^3 + 1)(\exp z - 1)$, $\frac{(z^2-\pi^2)\operatorname{sen} z}{z^7}$, $\cos z^3$, $\exp(\tan z)$, $\cos^3 z$.

5. Si a es cero de orden k para f y cero de orden n para g, ¿Qué es a para las siguientes funciones? i) $f(z)g(z)$; ii) $f(z) + g(z)$; iii) $f(z)/g(z)$.

6. Si f y $g \in H(D(a, r))$ y $f(a) = g(a) = 0$. Probar que $\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

7. De acuerdo al teorema de Liouville, una función entera y acotada f es constante. Demostrar este teorema calculando la integral $\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, donde $|a|$, $|b| < R$, y estimándola para $R \longrightarrow \infty$.

8. Supóngase que f y g son funciones enteras, y $|f(z)| \le |g(z)|$, para todo z. Probar que $f = kg$ para un $k \in \mathbb{C}$.

9. Definimos una *Superficie de Riemann* como un conjunto M y un atlas $\mathcal{A} := \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in \mathcal{C}\}$, donde los conjuntos U_α son abiertos del plano complejo $\mathbb{C}$, las funciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to S$ son holomorfas y cumplen: Si $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, entonces la composición correspondiente es un mapa biholomorfo (i.e. una biyección holomorfa con inversa holomorfa).
   Decimos que una función holomorfa $p : \tilde{S} \to S$ entre superficies de Riemman es un *cubrimiento* si $\forall\ x \in S\ \exists$ U entorno de x tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos cada uno de los cuales se proyecta a U en forma biholomorfa. El *cubrimiento universal* de una superficie de Riemann S es un espacio topológico $\tilde{S}$ simplemente conexo junto con un mapa holomorfo $p : \tilde{S} \to S$ que es un cubrimiento. El cubrimiento universal de una superficie S es único a menos de isomorfismos conformes (es decir, si $\tilde{S_1}$ y $\tilde{S_2}$ son cubrimientos universales de S, entonces existe una función biholomorfa entre $\tilde{S_1}$ y $\tilde{S_2}$.

   Propiedad universal del cubrimiento universal

   Si S_1 y S_2 son superficies de Riemann , $f : S_1 \to S_2$ es una función holomorfa tal que $f(x_o) = y_o$, $x_0 \in S_1$, $y_o \in S_2$, y $p_1 : \tilde{S_1} \to S_1$, $p_2 : \tilde{S_1} \to S_2$ son los respectivos cubrimientos universales, entonces dados $\tilde{x_o} \in \tilde{S_1}$ tal que $p_1(\tilde{x_o}) = x_o$, $\tilde{y_o} \in \tilde{S_2}$ tal que $p_2(\tilde{y_o}) = y_o$ $\exists! \tilde{f} : \tilde{S_1} \to \tilde{S_2}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{x_o}) = \tilde{y_o}$ y $p_2(\tilde{f}(x)) = f(p_1(x))$ $\forall\ x \in \tilde{S_1}$.

   a) Probar que el mapa exponencial es un cubrimiento de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

   b) Admitiendo que el cubrimiento universal de cualquier subconjunto de S^2 cuyo complemento posee al menos tres puntos es el disco unitario, probar que no hay funciones biholomorfas $S^2 \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ $(n \geq 3)$ en $S^2 \setminus \{x_1, x_2\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.