

PRÁCTICO 3

1.
  - a) Hallar la imagen de  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  por  $f$  tal que  $f(z) = z/(1-z)$ .
  - b) Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados por  $f$  tal que  $f(z) = (z-i)/(z+i)$ .
  - c) Si  $a, b, c$  son complejos no alineados, hallar una transformación de Möbius que transforme la circunferencia por ellos determinada en la circunferencia unidad.
2. En los casos siguientes, calcular  $f(E)$ , donde:
  - a)  $E = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $f : f(z) = (z-i)/(z+i)$ .
  - b)  $E = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $f : f(z) = (2z-i)/(2+iz)$ .
  - c)  $E = \{0 < \arg z < \pi/4\}$ ,  $f : f(z) = z/(z-1)$ .
  - d)  $E = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $f : f(z) = (z-1)/z$ .
  - e)  $E = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $f : f(z) = (z-1)/(z-2)$ .
3. Probar que en  $S^2$  toda transformación de Möbius tiene uno o dos puntos fijos.
4. Si  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , determinar los puntos del plano complejo que son preimágenes de las familias de rectas a)  $u = c_1$ , b)  $v = c_2$  en el plano  $w = u + iv$ , por la aplicación  $w = z^2$ .
5. Mostrar que existe  $\Omega$  tal que  $\exp(\Omega) = D(1, 1)$  y  $\exp(\Omega)$  es uno a uno en  $\Omega$  pero existen más regiones  $\Omega$  que cumplen con esa propiedad.
6. Considerar la transformación  $w = \log(z)$  (multivaluada). Mostrar que: a) círculos con centro en el origen se aplican en rectas paralelas al eje imaginario (para recorrer esta recta debemos dar infinitas vueltas sobre la cfa); b) rectas por el origen se aplican en rectas paralelas al eje real (observar que cada rayo se aplica en infinitas rectas paralelas); c) si elegimos una determinación del argumento que defina una rama biunívoca maximal, el plano se transforma en una faja de ancho  $2\pi$ .
7. Para las transformaciones  $f(z) = z + 1/z$  y  $g(z) = z - 1/z$ , hallar las imágenes de las circunferencias centradas en el origen (Respuesta para  $f$ : Si  $C_r : |z| = r \neq 1$ , entonces  $f(C) = \{(u+iv) \in \mathbb{C} : \frac{u^2}{(r+1/r)^2} + \frac{v^2}{(r-1/r)^2} = 1\}$  si  $r \neq 1$ , y  $f(C_1) = [-2, 2]$ ).
8. ¿En qué se transforma  $|z| = 1$  mediante  $f(z) = z/(1-z)^2$ ?
9. Hallar una transformación de Möbius que lleve  $E = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$  en:
  - i) el semiplano  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$  con  $\{|z - d/2| \leq d/2\}$  excluido; ii) la lúnula comprendida entre las circunferencias  $\{|z - d_1/2| \leq d_1/2\}$  y  $\{|z - d_2/2| \leq d_2/2\}$ .