

PRÁCTICO 1

- Hallar las siguientes raíces y construirlas: $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{i}$; $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[6]{-8}$; $\sqrt[8]{1}$; $\sqrt{1-i}$; $\sqrt{3+4i}$.
- Demostrar las siguientes identidades:
 - $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
 - $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.
 - $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$.
- Establecer la identidad $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $\forall z \neq 1$.
 - Hallar $\sum_{j=1}^n \cos j\theta$ y $\sum_{j=1}^n \sin j\theta$
 - Demostrar que si $\omega \neq 1$ es una raíz n -ésima de 1, entonces $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$.
- Demostrar que si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, los puntos z_1 , z_2 y z_3 son vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.
- Dibujar los conjuntos definidos por las siguientes relaciones, donde a y $b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
 - $|z - a| < r$, $|z - a| = r$, $|z - a| > r$;
 - $|z - 2| + |z + 2| = 5$;
 - $|z - 2| - |z + 2| > 3$;
 - $|z - a| = |z - b|$;
 - $\operatorname{Re} z \geq \alpha$; $\operatorname{Im} z < \alpha$;
 - $\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0$; $\operatorname{Re}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0$;
 - $2|z| > |1 + z^2|$;
 - $|z| < \arg z$.
- Dado $z \in \mathbb{C}$ se define $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : \exp w = z\}$
 - Probar que $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
 - Descubrir el error en el siguiente *sofisma de J. Bernoulli*, que pretende mostrar que $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Los argumentos son los siguientes: como $\operatorname{Ln}[(-z)^2] = \operatorname{Ln}(z^2)$, por (a) se tiene que $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(-z) + \operatorname{Ln}(-z)$, y por lo tanto que $2\operatorname{Ln} z = 2\operatorname{Ln}(-z)$, de donde se concluye que $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(-z)$.
- Hallar fórmulas para $|\cos z|$, $|\operatorname{sen} z|$, $|chz|$ y $|shz|$, y estudiar estas funciones (Si se tiene algún programa como el *Mathematica* aprovechar para graficarlas).
- Sea $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$ la proyección estereográfica. Probar que $\varphi(z)$ y $\varphi(w)$ son antípodas si y sólo si $z\bar{w} = -1$.
- ¿Qué corresponde en la esfera a una familia de rectas paralelas en el plano?
- Hallar en la esfera las imágenes de las regiones definidas por las siguientes desigualdades:
 - $\operatorname{Im} z > 0$;
 - $\operatorname{Im} z < 0$;
 - $\operatorname{Re} z > 0$;
 - $\operatorname{Re} z < 0$;
 - $|z| < 1$;
 - $|z| > 1$.
- Probar que si $\sum |z_n|$ y $\sum |w_n|$ convergen, entonces vale:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k z_n w_{k-n}$$

Ejercicios optativos

12. Sea p un polinomio de grado $n > 1$. Probar que las raíces de p' se encuentran en la cápsula convexa de las raíces de p (si $z_1, z_2, \dots, z_m \in \mathbb{C}$, su cápsula convexa es el conjunto de puntos de la forma $t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_m z_m$, donde $t_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, m$, y $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1$).
13. *Acercas de la compactificación de Alexandroff*
- Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto. Sea ∞ un elemento no perteneciente a X . Definimos $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, y $\tau_\infty := \tau \cup \{V : X_\infty \setminus V \subseteq X \text{ y } X_\infty \setminus V \text{ es compacto en } X\}$.
- a) Probar que τ_∞ es una topología para X_∞ , que la inclusión $\varphi : X \hookrightarrow X_\infty$ es un homeomorfismo sobre su imagen, y que X_∞ es un espacio de Hausdorff compacto.
- b) Supongamos que X' es un espacio de Hausdorff compacto, $\psi : X \rightarrow X'$ es un homeomorfismo sobre su imagen, y que $X' \setminus \psi(X)$ consta de un sólo punto. Probar que X_∞ y X' son homeomorfos.
- c) Si Y es otro espacio de Hausdorff localmente compacto y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua *propia*, es decir, $f^{-1}(K)$ es compacto en X , $\forall K \subseteq Y$ compacto, probar que $f_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ tal que $f_\infty|_X = f$ y $f_\infty(\infty) = \infty$ es una extensión continua de f . Mostrar que si f no es propia es posible que no posea ninguna extensión continua a X_∞ .
- d) Probar que \mathbb{R}_∞^n es homeomorfo a \mathbb{S}^n , $\forall n \geq 1$.