

Práctico 5

1. Sea  $\mathcal{F} \subset C(\Omega, M)$  una familia normal. Probar que:
  - a)  $\overline{\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}}$  es compacto  $\forall z \in \Omega$  ;
  - b)  $\mathcal{F}$  es una familia equicontinua en cada punto de  $\Omega$ .
2. Sea  $\Omega$  una región y  $\{f_n\}$  una sucesión en  $H(\Omega)$  que converge a  $f$ .
  - a) Si  $f \neq 0$ ,  $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$  y  $f(z) \neq 0$  para  $|z - a| = r$ , probar que existe  $n_0$  tal que  $\forall n \geq n_0$   $f_n$  y  $f$  tienen el mismo número de ceros en  $D(a, r)$ .
  - b) Si cada  $f_n$  no se anula en  $\Omega$ , probar que  $f$  es nula o no se anula en  $\Omega$ .
3. Sea  $\Omega$  una región y  $\{f_n\}$  una sucesión en  $H(\Omega)$  localmente acotada y  $f \in H(\Omega)$  con la propiedad que  $A = \{z \in \Omega \mid \lim_n f_n(z) = f(z)\}$  tiene un punto de acumulación en  $\Omega$ . Probar que  $f_n$  converge a  $f$ .
4. Probar que si  $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$  es normal entonces  $\mathcal{F}' = \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$  también es normal.
5. Sea  $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$  normal tal que  $f(\Omega) \subset A$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}$  con  $A$  abierto. Probar que si  $g \in H(A)$  es analítica y acotada en conjuntos acotados, entonces  $\{g \circ f \mid f \in \mathcal{F}\}$  es normal.
6. Sea  $\{f_n\} \subset H(\Omega)$  una sucesión de funciones inyectivas que convergen a  $f$ . Probar que  $f$  es inyectiva o constante.