

PRÁCTICO 2

- Hallar el radio de convergencia:  $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ,  $\sum \frac{e^n z^n}{n}$ ,  $\sum n z^n$ ,  $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , con  $a_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ es par} \\ b^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ .
- Hallar el desarrollo en serie de McLaurin de las siguientes funciones indicando la región de validez del desarrollo: i)  $e^z$ , ii)  $\operatorname{sen} z$ , iii)  $\operatorname{cos} z$ , iv)  $\frac{1}{1-z}$ , v)  $\frac{1}{1+z}$ , vi)  $\frac{1}{(1-z)^2}$ , vii)  $\frac{1}{(1-z)^3}$ , viii)  $\frac{e^z}{1+z}$ .
- El radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  es  $r > 0$ . Determinar los radios de convergencia de las series:  
(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n z^n$ ; (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) a_n z^n$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ ;  
(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n a_n z^n$ ; (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^k z^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- Para  $|z| < 1$  sumar las series:  
(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ ; (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n / n$ ; (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} / (2n+1)$ ; (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{pn}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .
- Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  tiene radio de convergencia  $r > 0$ ,  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\forall z \in D(0, r)$ , y sea  $\omega \in D(0, r)$ . Probar que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(\omega)}{n!} z^n$  tiene radio de convergencia  $\rho \geq r - |\omega|$ , y se tiene que  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(\omega)}{n!} (z - \omega)^n$ ,  $\forall z \in D(\omega, r - |\omega|)$ . Deducir que  $S$  es una función analítica en  $D(0, r)$ .
- Averiguar en qué puntos son derivables las funciones:  
i)  $f(z) = |z|^2$ , ii)  $f(z) = \bar{z}^2$ , iii)  $f(z) = \frac{1}{z}$ , iv)  $f(z) = e^{\operatorname{sen} z}$
- Hallar las regiones donde  $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$  es holomorfa.
- Mostrar que en  $z = 0$ ,  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann pero no existe la derivada.
- Sea  $f : C \rightarrow C$ . Probar que  $f \in H(C)$  si y sólo si  $g \in H(C)$  siendo  $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$ .
- Si  $f \in H(\Omega)$ , probar que las siguientes condiciones implican que  $f$  es constante en  $\Omega$ :
  - $|f(z)|$  es constante en  $\Omega$ ;
  - $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$ ;
  - $\operatorname{Im} f(z)$  es constante en  $\Omega$ .