

Práctico 8

1. La *espiral logarítmica* es la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$.
 - a) Probar que $\alpha(t)$ tiende a $(0, 0)$ girando alrededor de $(0, 0)$ cuando t tiende a $+\infty$.
 - b) Probar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$ es finito, es decir que α tiene longitud de arco finita en $[0, +\infty)$.
2. Sean p y q en \mathbb{R}^3 . Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada tal que existen $a, b \in I$, $a < b$, con $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$.

- a) Probar que para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 se verifica

$$\langle q - p, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- b) Considerando $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$, probar que $\|q - p\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$, es decir que la curva que minimiza la distancia entre p y q es el segmento de recta que los une.
3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco. Probar que la curvatura κ y la torsión τ se obtienen mediante $\kappa = \|t'\|$ y $\tau = -\frac{1}{\kappa^2}(t, t', t'')$, siendo $t = \alpha'$.
 4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada pero que su parámetro t no es necesariamente la longitud de arco. Probar que la curvatura κ y la torsión τ se obtienen mediante

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = -\frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

5. Calcular el triedro de Frenet de la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.
6. Se considera la hélice $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con $a > 0, b \neq 0$. Calcular en cada punto $t \in \mathbb{R}$ el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión.
7. Mostrar que una curva de curvatura constante contenida en una esfera de \mathbb{R}^3 , es necesariamente un arco de circunferencia.
8. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco sin puntos singulares de orden 1 que verifica $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0, \forall s \in I$. Probar que la traza de α está contenida en una esfera si y solo si

$$R^2 + (R'T)^2 = \text{cte},$$

siendo $R = 1/\kappa$, $T = 1/\tau$ y $R' = dR/ds$. Sugerencia: definir $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $\beta = \alpha + Rn - R'Tb$ y probar que $R^2 + (R'T)^2 = \text{cte}$ si y solo si $\beta = \text{cte}$.

9. *Hélices.* Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco que suponemos verifica $\tau(s) \neq 0$, para todo s en I . Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) La tangente forma un ángulo constante con una dirección fija.
- b) La normal principal es paralela a un plano fijo.
- c) La binormal forma un ángulo constante con una dirección fija.
- d) El cociente τ/κ es constante.

Una curva que verifique las condiciones anteriores se llama *hélice*. Mostrar que la hélice se parametriza por $\alpha(t) = \beta(t) + (t - t_0)v$ donde β es una parametrización de una curva plana y v es un vector perpendicular al plano de β .

10. Sea I un intervalo abierto y $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dados $a, b, \varphi \in \mathbb{R}$, definimos $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante

$$\theta(s) = \int \kappa(s) ds + \varphi, \quad \alpha(s) = \left(\int \cos \theta(s) ds + a, \int \sin \theta(s) ds + b \right), \quad s \in I.$$

- a) Probar que la curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por la longitud de arco y tiene curvatura $\kappa_\alpha = \kappa$.
- b) Probar que variando a, b y φ obtenemos todas las curvas $I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tienen curvatura κ .