

Práctico 7

1. Se considera el Toro T con la parametrización $X : U \rightarrow T$ definida por

$$X(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, a + r \sin v),$$

siendo $U = \{(u, v) : 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$. Sea $\epsilon : 0 < \epsilon < 2\pi$ y $R_\epsilon = X(Q_\epsilon)$, siendo $Q_\epsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon \leq u \leq 2\pi - \epsilon, \epsilon \leq v \leq 2\pi - \epsilon\}$. Calcular el área del Toro como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(R_\epsilon)$.

2. Sean $\eta_0 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por $\eta_0 = z dx \wedge dy + y dz \wedge dx + x dy \wedge dz$. Se consideran $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ la función norma $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

- Probar que $d\eta_0 = 3 dx \wedge dy \wedge dz$.
- Sea $\eta = (f \circ r) \eta_0 \in \Omega^2(U)$. Calcular $d\eta$ en función de f y hallar f de forma tal que η sea cerrada y $f(1) = 1$.
- Trabajando con el f hallado, calcular $\int_{S^2} \eta$ donde S^2 está orientada con la normal apuntando hacia afuera.
- Concluir que no existe $\theta \in \Omega^1(U)$ tal que $\eta = d\theta$.

3. a) Probar que si C es una curva regular que es el borde de una superficie regular orientable compacta S y F es un campo irrotacional definido en un abierto que contiene a S , entonces $\int_C \langle F, T \rangle ds = 0$.

- b) Probar que si S es una superficie regular que es el borde de una variedad compacta V de dimensión 3 y F es un campo solenoidal definido en un abierto que contiene a V , entonces $\int_S \langle F, N \rangle dA = 0$.

4. Sea S una superficie compacta con borde orientada y C el borde de S con la orientación inducida. Sea $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ fijo. Definimos $F, G \in \chi(\mathbb{R}^3)$ mediante $F(x, y, z) = (a, b, c) \times (x, y, z)$, $G(x, y, z) = (a, b, c)$, para todo (x, y, z) en \mathbb{R}^3 . Probar $\int_C F = 2 \int_S G$.

5. Calcular las siguientes integrales (elegir una orientación, en los casos en que no se indique).

- $\int_{S^1} F$, donde $F = (x^2 - y^3, x^3 + y^2)$ y S^1 es recorrido en sentido antihorario.
- $\int_C F$, donde $F = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ y C es la elipse $4x^2 + y^2 = 16$, recorrida en sentido antihorario. Sugerencia: probar $\int_C F = \int_{S^1} F$.
- $\int_C F$, donde $F = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ y $C = C_1 \cup C_2$, siendo C_1 el camino parabólico que va desde $(-1, 0)$ a $(2, 3)$ por $y = x^2 - 1$ y C_2 el segmento de recta desde $(2, 3)$ a $(-1, 0)$.
- $\int_C (6x^2y^2 - 3yz^2, 4x^3y - 3xz^2, -6xyz)$, donde C es la curva intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = 2 + x + y$.

- e) $\int_C F$, donde $F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$ y C es la curva intersección de la esfera $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ con el plano $3x - 5y - z = 2$.
- f) $\int_S F$, donde $F = (2x, 3y, -4z)$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con la normal apuntando hacia afuera.
- g) $\int_{S^2} F$, donde $F = (2x, x^2 - xz^2, x^2y - y^3)$ y S^2 la orientamos con la normal apuntando hacia adentro.
- h) $\int_{S^2} F$, donde $F = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$ y S^2 la orientamos con la normal saliente.
- i) $\int_C (z, x, y)$, donde C es la circunferencia intersección del plano $x + y + z = 0$ y con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, recorrida en sentido antihorario al verla desde abajo del plano $x + y + z = 0$.
- j) $\int_S \text{rot } F$, donde $F = (y, 2z, 3x)$ y S es el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. Análogamente al práctico 2, si $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapa diferenciable, definimos

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

y decimos que h es *armónica* si $\Delta h = 0$. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una variedad de dimensión 3 compacta con borde $S = \partial M$ y sean $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

a) Probar la *identidad de Green*:

$$\int_M f \Delta g \, dV = \int_S \langle f \nabla g, N \rangle \, dA - \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dV$$

b) Probar que si f es armónica y $f|_S = 0$ entonces $f = 0$.

7. Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\eta = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(U)$. Para cada $R \in \mathbb{R}^+$ se define $\alpha_R : [0, 2\pi] \rightarrow U$ mediante $\alpha_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$.

a) Probar que $\int_{\alpha_R} \eta = \int_{\alpha_1} \eta$, $\forall R > 0$.

b) Sea μ una 1-forma cerrada arbitraria en U . Probar que para todo camino cerrado simple γ en U que contenga en su interior a $(0,0)$ se verifica $\int_\gamma \mu = \int_{\alpha_R} \mu$, siendo R tal que la imagen de α_R está contenida en el interior de γ .

c) Sea ω una 1-forma cerrada en U . El objetivo es probar que existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ y existe una función $f \in C^\infty(U)$ tales que

$$\omega = \lambda \eta + df. \tag{1}$$

1) Suponiendo que existen λ y f que verifican (1), probar que $\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \omega$.

2) Para el λ hallado en la parte anterior, probar que $\int_\gamma \omega - \lambda \eta = 0$, para todo camino cerrado γ en U . Sugerencia: considerar cuando $(0,0)$ está en el interior de γ y cuando no.

3) Probar que existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $\omega = \lambda \eta + df$.

d) Deducir $H^1(U) \simeq \mathbb{R}$.

Los siguientes ejercicios son optativos.

8. a) Sean M y N variedades, M sin borde y N con borde. Probar que $M \times N$ es una variedad con borde cuyo borde es $M \times \partial N$.
- b) Supongamos que $N = [0, 1]$. Consideramos en $M \times \{0\}$ y en $M \times \{1\}$ las orientaciones inducidas como borde de $M \times N$, probar que el difeomorfismo $(x, 0) \mapsto (x, 1)$ invierte la orientación.
9. Decimos que dos curvas cerradas $\alpha, \gamma : S^1 \rightarrow M$ son *homotópicas* si existe un mapa $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ diferenciable tal que $F(x, 0) = \alpha(x) \forall x \in S^1$ y $F(x, 1) = \gamma(x) \forall x \in S^1$. F representa una deformación diferenciable entre las curvas α y γ dentro de M .

- a) Sea ω una 1-forma cerrada en M . Probar que si $\alpha, \gamma : S^1 \rightarrow M$ son homotópicas entonces

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Sugerencia: Usar el ejercicio anterior y el teorema general de Stokes.

- b) Decimos que una variedad es *simplemente conexa* si es conexa y toda curva cerrada es homotópica a la curva constante $c_p : S^1 \rightarrow M$ $c_p(x) = p \in M \forall x$. Probar que si M es simplemente conexa entonces la integral de una 1-forma cerrada sobre cualquier curva cerrada es 0.
- c) Sea U un abierto de \mathbb{R}^n simplemente conexo, probar que una 1-forma es exacta si y solo si es cerrada (consecuentemente $H^1(U) = \{0\}$).
- d) Sea V un abierto con forma de estrella respecto a p_0 . Verificar que dada una curva cerrada $\gamma : S^1 \rightarrow V$ la función $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow V$ dada por $F(x, t) = tp_0 + (1-t)\gamma(x)$ es una homotopía entre la curva γ y la curva constante p_0 . Dar ejemplos de conjuntos simplemente conexos que no tengan forma de estrella.