Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III
Primer semestre de 2006

Práctico 4

1. Sea $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$. Probar que:

   a) Para $t = 0$, α es tangente al eje x.

   b) Cuando $t \to +\infty$, $\alpha(t) \to (0, 0)$ y $\dot{\alpha}(t) \to (0, 0)$.

   c) Cuando $t \to -1$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + 1 = 0$.

   d) ¿Es α un difeomorfismo?

2. Dar un ejemplo de un mapa que sea un difeomorfismo local pero no un difeomorfismo global. Dar un ejemplo de una función diferenciable invertible, con inversa continua, pero que no sea un difeomorfismo.

3. Probar que todo subespacio de dimensión n de $\mathbb{R}^k$ es una variedad de dimensión n.

4. Determinar cuales de las superficies cuádricas son superficies regulares y averiguar cuales de ellas son difeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

5. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$ y $f_2(x, y, z) = xyz^2$. Averiguar qué valores tienen como preimagen, por dichas funciones, una superficie regular.

6. Se consideran en la esfera S^2 el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y el polo sur $S = (0, 0, -1)$. Identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano $xy \subset \mathbb{R}^3$ mediante $(u, v) \leftrightarrow (u, v, 0)$. Sea $X_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ la función que lleva cada punto Q del plano xy en la intersección de S^2 con la recta que une Q con N. El mapa X_N se llama la *proyección estereográfica.*

   a) Mostrar que $X_N : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ y $(X_N)^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ están definidas por:

   $$X_N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\right),$$
   $$(X_N)^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right).$$

   b) Probar que X_N es una parametrización.

   c) Observar que mediante la proyección esterográfica se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

7. Determinar cual es la imagen por la proyección estereográfica desde el polo norte de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

   a) $\mathbb{R}^2$, b) $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$, c) $S^1 = \{\|x\| = 1\}$, d) Rectas por el origen.

8. Una *superficie de revolución* es la que se obtiene rotando una curva plana C alrededor de un eje contenido en el plano de la curva y tal que el eje no intersecta a la curva.

a) Sea S una superficie de revolución obtenida a partir de una curva regular contenida en el semiplano xz, $z > 0$ y con eje de rotación el eje z. Obtener parametrizaciones de S, partiendo de las parametrizaciones de C.

b) El *Toro* es la superficie de revolución obtenida al girar la circunferencia de ecuación $(x-a)^2 + z^2 = r^2$, $0 < r < a$, contenida en el plano xz, alrededor del eje z. Obtener parametrizaciones del toro como en a). Observar que para diferentes valores de a y r las superficies obtenidas son difeomorfas.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y S la superficie definida por la ecuación $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$. Mostrar que para todo p en S, el plano por p paralelo a T_pS pasa por el origen $(0,0,0)$.

10. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad y p_0 un punto de $\mathbb{R}^k$ fijo. Definimos $f : M \to \mathbb{R}$ mediante $f(p) = \|p - p_0\|^2$, $p \in M$.

    a) Probar que para todo $p \in M$ es $df_p(v) = 2\langle p - p_0, v\rangle$, $\forall v \in T_pM$.

    b) Si $p_0 \notin M$, definimos $g : M \to \mathbb{R}$ mediante $g(p) = \|p - p_0\|$, $p \in M$. Probar que para todo $p \in M$ es $dg_p(v) = \frac{\langle p-p_0, v\rangle}{\|p-p_0\|}$, $\forall v \in T_pM$.

11. Probar que si M es una variedad conexa y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que verifica $df_p = 0$ para todo p en M, entonces f es constante. (Sugerencia: aplicar el teorema del valor medio de Lagrange.)

12. Si S es una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$ se define la *recta normal* a S en p como la recta que pasa por p y es perpendicular a T_pS. Mostrar que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por el origen entonces la superficie está contenida en una esfera.

13. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, $a \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f y $M = f^{-1}(\{a\})$, entonces para todo p en M es $T_pM = \{\nabla f(p)\}^{\perp}$.

14. Dado $p \in S^2$, probar que $T_pS^2 = \{p\}^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p\rangle = 0\}$.

15. ¿Cuál es el espacio tangente al hiperboloide definido por: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $(1,0,0)$?

16. Sean $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ y $SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$. Pensamos $GL_2(\mathbb{R})$ y $SL_2(\mathbb{R})$ dentro de $\mathbb{R}^4$ identificando las matrices $M_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ mediante $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \leftrightarrow (x,y,z,t)$.

    a) Probar que $GL_2(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión 4.

    b) Probar que $SL_2(\mathbb{R})$ es una variedad de dimensión 3.

    c) Probar que $T_{\mathrm{Id}}SL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Hallar $T_{\mathrm{Id}}GL_2(\mathbb{R})$.

Los siguientes ejercicios son opcionales.

17. *a*) Sean $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^l$ dos variedades de dimensión m y n respectivamente. Probar que el producto cartesiano $M \times N \subset \mathbb{R}^{k+l}$ es una variedad de dimensión $m+n$.

    b) Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función diferenciable, definimos el *gráfico* de f como

    $$\operatorname{graf}(f) = \{(x, f(x)) \subset M \times N : x \in M\}.$$

    Probar que $\operatorname{graf}(f)$ es una variedad diferenciable de igual dimensión que M.

c) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sean $f, g : U \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Probar que las variedades $\operatorname{graf}(f)$ y $\operatorname{graf}(g)$ son difeomorfas y que cualquiera de ellas es difeomorfa a U. Concluir que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es difeomorfo a un cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$.

18. Sea $f : M \to N$ es un mapa diferenciable entre variedades. Un punto $a \in M$ es un *valor regular* de f si $a \in \operatorname{Im} f$ y $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es sobreyectiva, para todo $p \in f^{-1}(a)$.

    Vale lo siguiente: Si $f : M \to N$ es un mapa diferenciable entre variedades y $a \in M$ es un valor regular de f, entonces $f^{-1}(a)$ es una variedad y $\dim f^{-1}(a) = \dim M - \dim N$.

    Probar: Si $f : M \to N$ es un mapa diferenciable entre variedades y $a \in N$ es un valor regular de f, entonces $T_x f^{-1}(a) = \operatorname{Ker}\,(df_x)$ para todo $x \in f^{-1}(a)$.

    Sugerencia: recordar que si $v \in T_x f^{-1}(a)$ entonces $d_x f(v) = \dfrac{d}{dt} f(\alpha(t))|_{t=0}$, para alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ contenida en $f^{-1}(a)$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$.

19. Probar que $S_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices simétricas reales $n \times n$ es una variedad. ¿Cuál es la dimensión de $S_n(\mathbb{R})$?.

20. El conjunto $\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = \mathrm{id}\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ se llama el *grupo ortogonal*.

    a) Observar que $A \in \mathrm{O}(n)$ si y solo si el conjunto $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ es una base ortonormal; en particular si $A = (a_{ij})$, entonces $|a_{ij}| \leq 1$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

    b) Probar que $\mathrm{O}(n)$ es una variedad diferenciable y hallar su dimensón. (Sugerencia: considerar $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ definida por $F(A) = AA^t$ y demostrar que $\mathrm{id} \in S_n(\mathbb{R})$ es valor regular de F.)

    c) Hallar $T_{\mathrm{id}}\, \mathrm{O}(n)$.

    d) Probar que si $A = (a_{ij})$ entonces $\sum a_{ij}^2 \leq n^2$.

    e) Concluir que $\mathrm{O}(n)$ es una variedad compacta.

Superficies cuádricas

Una *superficie cuádrica* es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de la forma

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{12}\, xy + 2\, a_{13}\, xz + 2\, a_{23}\, yz + b_1\, x + b_2\, y + b_3\, z + c = 0 \right\},$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$.

Se prueba que toda superficie cuádrica coincide -a menos de trasladar, rotar o intercambiar los ejes de coordenadas- con una de las siguientes:

Casos con $\det A \neq 0$.

1. *Hiperboloide de una hoja*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
2. *Hiperboloide de dos hojas*: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. *Elipsoide:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. *Cono:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.
5. *Punto:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ((x,y,z) = (0,0,0))$.
6. *Conjunto vacío:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Casos con $\det A = 0$.

1. *Paraboloide elíptico:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
2. *Paraboloide hiperbólico:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
3. *Cilindro elíptico:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
4. *Cilindro hiperbólico:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
5. *Cilindro parabólico:* $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.
6. *Dos planos paralelos:* $\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (x = a \text{ y } x = -a)$.
7. *Dos planos secantes:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ y } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0)$.
8. *Un plano (doble):* $\frac{x^2}{a^2} = 0 \quad (x = 0)$.
9. *Una recta (doble):* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (x = 0 \text{ e } y = 0)$.
10. *Conjunto vacío:* $\frac{x^2}{a^2} = -1$.