Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo III
Primer semestre de 2006

Práctico 2

1. Calcular $\int_C 2xydx - x^2dy$ sobre las siguientes curvas C que van de $O = (0,0)$ a $A = (2,1)$. a) segmento OA; b) parábola de eje Oy; c) parábola de eje Ox; d) poligonal OBA, $B = (2,0)$.

2. Calcular $\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ donde C es el arco de parábola de ecuación $y = x^2$ que va desde $(1,1)$ hasta $(2,4)$.

3. Calcular $\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, siendo C la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$ recorrida en sentido antihorario.

4. Sea $\omega = \frac{-2xy}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}dx + \frac{x^2-y^2-1}{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}dy$ definida en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$.

   a) Probar que ω es cerrada.

   b) Probar que ω no es exacta

5. Sea $\omega = \frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}\,dx + \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}\,dy$.

   a) Probar que ω es cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$.

   b) Probar que ω es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus U$ siendo $U = \{(x,y) :\ \|x\| \geq 1,\ y = 0\}$.

   c) Calcular $\int_C \omega$ siendo C la siguiente curva $\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

6. Probar que $\int_\gamma xdx + ydy + zdz = 0$ para todo camino cerrado γ en $\mathbb{R}^3$.

7. Sean $\omega_0 \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $\omega_0 = x\,dx + y\,dy + z\,dz$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y $r : U \to \mathbb{R}$ la función norma $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   a) Probar que $d(f \circ r) = \frac{f' \circ r}{r}\,\omega_0$.

   b) Sea $\omega = (f \circ r)\,\omega_0 \in \Omega^1(U)$. Hallar $g : U \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que $\omega = dg$.

   c) Calcular $\int_C \omega$, siendo C la circunferencia de radio 1 centrada en el origen y contenida en el plano xy, orientada en sentido antihorario.

8. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ consideramos el mapa $* : \Omega^1(U) \to \Omega^1(U)$ dado por $*(adx + bdy) = -ady + bdx$.

   a) Calcular explícitamente $d * \omega$ para una 1 forma ω.

   b) Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definimos el *Laplaciano* de f como

   $$\Delta\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

   Probar que $(\Delta\, f)dx \wedge dy = d * df$.

9. Decimos que una función diferenciable u es *armónica* si $\Delta\, u = 0$.

   i) Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto estrella y $f : U \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable C^∞ tal que

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   donde $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

      a) Probar que las formas $\omega = vdx + udy$ y $*\omega$ son cerradas.

      b) Probar que u y v son funciones armónicas.

   ii) Sea $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica. Probar que existe $v : U \to \mathbb{R}$ tal que

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   Sugerencia: Observar que la forma $*du$ es cerrada.