

Práctico 1

Si U es un abierto en \mathbb{R}^3 , escribiremos por $\chi(U)$ al conjunto de los campos vectoriales (diferenciables) en U .

1. Calcular la derivada exterior de las siguientes formas en $U \subset \mathbb{R}^3$:

a) $x^3y - \cos(z)e^{yx}$, $U = \mathbb{R}^3$.

b) $13x dx + y^2 dy + xyz dz$, $U = \mathbb{R}^3$.

c) $\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz$, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

d) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$, $U = \mathbb{R}^3$.

e) $(x + 2y^3) (dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dx)$, $U = \mathbb{R}^3$.

2. Probar que si $U \subset \mathbb{R}^3$ y $f, g \in C^\infty(U)$, entonces $d(f dg) = df \wedge dg$ en $\Omega^1(U)$.

3. Para los campos X e Y en \mathbb{R}^3 definidos por $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ e $Y(x, y, z) = (3x, 2y, z)$, calcular $\text{rot}(X)$ y $\text{div}(X)$.

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. A cada campo $F = (F^1, F^2, F^3) \in \chi(U)$ le asociamos las formas $\omega_F^1 \in \Omega^1(U)$ y $\omega_F^2 \in \Omega^2(U)$ y cada función $f \in C^\infty(U)$ le asociamos la forma $\omega_f^3 \in \Omega^3(U)$, definidas mediante:

$$\omega_F^1 = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz, \quad \omega_F^2 = F^3 dx \wedge dy + F^2 dz \wedge dx + F^1 dy \wedge dz, \quad \omega_f^3 = f dx \wedge dy \wedge dz$$

Probar :

$$df = \omega_{\nabla f}^1, \quad d(\omega_F^1) = \omega_{\text{rot } F}^2, \quad d(\omega_F^2) = \omega_{\text{div } F}^3.$$

5. Sean $F, G \in \chi(U)$ y $f, g \in C^\infty(U)$. Probar:

a) $\omega_F^1 \wedge \omega_G^1 = \omega_{F \times G}^2$, $\omega_F^1 \wedge \omega_G^2 = \omega_{\langle F, G \rangle}^3$, $f \omega_G^1 = \omega_{fG}^1$, $f \omega_G^2 = \omega_{fG}^2$.

b) $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$, $\text{rot}(gF) = g \text{rot } F + \nabla g \times F$, $\text{div}(gF) = \langle \nabla g, F \rangle + g \text{div } F$.

6. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $F \in \chi(U)$ y $f \in C^\infty(U)$. Probar:

$$\text{rot}(\nabla f) = 0, \quad \text{div}(\text{rot } F) = 0, \quad \text{rot}(f \nabla f) = 0.$$

7. Sean $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $F \in \chi(U)$. Se dice que F tiene un *potencial escalar* si $F = \nabla f$, con $f \in C^\infty(U)$, que F tiene un *potencial vector* si $F = \text{rot } G$ con $G \in \chi(U)$, que F es *irrotacional* si $\text{rot } F = 0$ y que F es *solenoidal* si $\text{div } F = 0$.

a) Probar que si F tiene un potencial escalar, entonces es irrotacional.

b) Probar que si F tiene un potencial vector entonces es solenoidal.

8. Sean $U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ y $f : U \rightarrow V$ definida por $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Como f es un difeomorfismo, entonces el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ define a $r, \theta : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como funciones de x e y . Probar

$$d\theta = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy, \quad \text{en } \Omega^1(V).$$

9. Investigar si las siguientes formas son cerradas y/o exactas en U . Si son exactas dar un potencial ($f \in C^\infty(U)$ tal que $df = \omega$).

$$\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \text{ en } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \omega = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy \text{ en } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\},$$

$$\omega = e^x y dx + z dy + e^x dz \text{ en } U = \mathbb{R}^3, \quad \omega = (e^x y^2 + z) dx + 2e^x y dy + x dz \text{ en } U = \mathbb{R}^3.$$

10. Probar que la forma $\omega = (1 - e^x) dx \wedge dy - yz dz \wedge dx + (xz - 1) dy \wedge dz$ es cerrada. Hallar un potencial con la tercera componente nula y otro con la primera componente nula y probar que difieren en una forma exacta.
11. Probar que las siguientes formas son exactas encontrando un potencial para cada una.

a) $\omega = (6x^2y - 3xy^2) dx \wedge dy$ en \mathbb{R}^2 .

b) $\omega = -4xy dx \wedge dy - 2xz dz \wedge dx + 2yz dy \wedge dz$ en \mathbb{R}^3 .

c) $\omega = 12x^2y^3z^4 dx \wedge dy \wedge dz$ en \mathbb{R}^3 .