

## V. Formas en variedades

1 de junio de 2006

### 1. Formas multilineales alternadas

En esta sección repasaremos sin demostraciones los resultados de formas multilineales alternadas que necesitamos para el estudio de las formas diferenciables.

Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $n$  un entero positivo. Una  $n$ -forma multilineal alternada en  $V$  es una función  $\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_n \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica las siguientes condiciones:

1.  $\alpha(v_1, \dots, av_i + w_i, \dots, v_n) = a\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \alpha(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n)$  para todo  $a \in \mathbb{K}$ ,  $v_1, \dots, v_n, w_i \in V$  y todo  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$  cada vez que existan  $i \neq j$  tales que  $v_i = v_j$ .

Observar que la segunda condición se puede reemplazar por:

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n), \quad \forall i \neq j, v_1, \dots, v_n \in V.$$

Escribiremos

$$\text{Alt}_k(V) = \{\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ es una } k\text{-forma multilineal alternada}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

El conjunto  $\text{Alt}_k(V)$  tiene estructura de espacio vectorial definiendo:

$$(\omega + \eta)(v_1, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) + \eta(v_1, \dots, v_n), \quad (a\omega)(v_1, \dots, v_n) = a\omega(v_1, \dots, v_n).$$

Observar que  $\text{Alt}_1(V) = V^*$ . Definimos  $\text{Alt}_0(V) := \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 1.1.** Si  $V = \mathbb{R}^3$ , definimos  $\omega \in \text{Alt}_2(V)$  mediante  $\omega((x, y, z), (x', y', z')) = xy' - yx' + 2yz' - 2y'z$ . Observar que podemos reescribir  $\omega$  mediante:

$$\begin{aligned} \omega((x, y, z), (x', y', z')) &= xy' - yx' + 2yz' - 2y'z = xy' + y(-x' + 2z') - 2y'z \\ &= (x, y, z) \begin{pmatrix} y' \\ -x' + 2z' \\ -2y' \end{pmatrix} = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

De esta forma es fácil probar que  $\omega$  es una 2-forma alternada en  $\mathbb{R}^3$ . Observar que la matriz en la igualdad (1) es antisimétrica, es decir verifica  $A^t = -A$ .

**Ejemplo 1.2.** Si  $V = \mathbb{R}^n$ , entonces  $\det \in \text{Alt}_n(V)$ , siendo  $\det$  la función determinante:

$$\det((x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, (x_{1n}, \dots, x_{nn})) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

De ahora en adelante supondremos que  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ .

**Definición 1.3.** Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$ , definimos  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{vmatrix}, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V.$$

Claramente  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \text{Alt}_k(V)$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$ .

**Ejemplo 1.4.** Si  $\alpha, \beta \in V^*$  es  $\alpha \wedge \beta \in \text{Alt}_2(V)$  y

$$(\alpha \wedge \beta)(u, v) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) \\ \beta(u) & \beta(v) \end{vmatrix} = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u), \quad \forall u, v \in V.$$

Consideremos  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica y  $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  la base dual en  $V^*$ , es decir

$$e_1^*(x, y, z) = x, \quad e_2^*(x, y, z) = y, \quad e_3^*(x, y, z) = z.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (e_1^* \wedge e_2^*)((x, y, z), (x', y', z')) &= \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx', \\ (e_1^* \wedge e_3^*)((x, y, z), (x', y', z')) &= \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = xz' - zx', \\ (e_2^* \wedge e_3^*)((x, y, z), (x', y', z')) &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy'. \end{aligned}$$

Observar que si  $\omega$  es la 2-forma del ejemplo 1.1, entonces  $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + 2e_2^* \wedge e_3^*$ .

**Ejemplo 1.5.** Si  $\alpha, \beta, \gamma \in V^*$  es  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \text{Alt}_3(V)$  y

$$(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(u, v, w) = \begin{vmatrix} \alpha(u) & \alpha(v) & \alpha(w) \\ \beta(u) & \beta(v) & \beta(w) \\ \gamma(u) & \gamma(v) & \gamma(w) \end{vmatrix}$$

Si consideramos de nuevo  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica y  $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  la base dual en  $V^*$ , entonces

$$(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)((x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Observar que  $\wedge$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $\alpha \wedge \alpha = 0$  y  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ .
2. Si existen  $i \neq j$  tales que  $\alpha_i = \alpha_j$ , entonces  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_j \wedge \cdots \wedge \alpha_k = 0$ .
3.  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_j \wedge \cdots \wedge \alpha_k = -\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_j \wedge \cdots \wedge \alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ .

**Teorema 1.6.** Si  $\dim V = n$ , entonces

1.  $\dim \text{Alt}_k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  para todo  $k \leq n$  y
2.  $\text{Alt}_k(V) = \{0\}$  para todo  $k > n$ .

Además si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V$  y  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  es la base dual en  $V^*$ , entonces

$$\mathcal{B} = \{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base de  $\text{Alt}_k(V)$ , para todo  $k = 1, \dots, n$  y

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \quad \forall \omega \in \text{Alt}_k(V).$$

□

Observar que en particular si  $\omega \in \text{Alt}_n(V)$ , entonces

$$\omega = \omega(e_1, \dots, e_n) e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*. \quad (2)$$

**Ejemplo 1.7.** Supongamos que  $\dim V = 3$  y sea  $\{e_1, e_2, e_3\}$  una base de  $V$ , entonces  $\text{Alt}_k(V) = \{0\}$ ,  $\forall k \geq 4$  y

$$\{1\} \text{ es una base de } \text{Alt}_0(V) = \mathbb{R}, \quad \dim \text{Alt}_0(V) = \binom{3}{0} = 1,$$

$$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\} \text{ es una base de } \text{Alt}_1(V) = V^*, \quad \dim \text{Alt}_1(V) = \binom{3}{1} = 3,$$

$$\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\} \text{ es una base de } \text{Alt}_2(V), \quad \dim \text{Alt}_2(V) = \binom{3}{2} = 3,$$

$$\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*\} \text{ es una base de } \text{Alt}_3(V), \quad \dim \text{Alt}_3(V) = \binom{3}{3} = 1.$$

En el caso de  $V = \mathbb{R}^3$  estas bases fueron halladas explícitamente en los ejemplos 1.4 y 1.5.

**Ejemplo 1.8.** Si  $V = \mathbb{R}^n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\dim \text{Alt}_n(V) = \binom{n}{n} = 1$  y  $\{e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\}$  es una base de  $\text{Alt}_n(V)$ .

$$\begin{aligned} (e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)((x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, (x_{1n}, \dots, x_{nn})) &= \begin{vmatrix} e_1^*(x_{11}, \dots, x_{n1}) & \cdots & e_1^*(x_{1n}, \dots, x_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n^*(x_{11}, \dots, x_{n1}) & \cdots & e_n^*(x_{1n}, \dots, x_{nn}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Luego  $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = \det$  (el determinante) y  $\{\det\}$  es una base de  $\text{Alt}_n(V)$ .

**Definición 1.9.** Si  $\omega \in \text{Alt}_k(V)$  y  $\eta \in \text{Alt}_l(V)$ , definimos su *producto*  $\omega \wedge \eta \in \text{Alt}_{k+l}(V)$ , mediante lo siguiente: si  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V$  y

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*, \quad \eta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} b_{j_1, \dots, j_l} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*,$$

entonces

$$\omega \wedge \eta := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n}} a_{i_1, \dots, i_k} b_{j_1, \dots, j_l} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_l}^*.$$

Se prueba que esta definición no depende de la elección de la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposición 1.10.** *El producto de formas tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\omega \wedge (\eta + \nu) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \nu$  y  $(\eta + \nu) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \nu \wedge \omega$ ,  $\forall \omega \in \text{Alt}_k(V)$  y  $\eta, \nu \in \text{Alt}_l(V)$ .
2.  $\omega \wedge (\eta \wedge \nu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \nu$ ,  $\forall \omega \in \text{Alt}_k(V)$ ,  $\eta \in \text{Alt}_l(V)$  y  $\nu \in \text{Alt}_h(V)$ .
3.  $\omega \wedge (a\eta) = (a\omega) \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta)$ ,  $\forall \omega \in \text{Alt}_k(V)$ ,  $\eta \in \text{Alt}_l(V)$  y  $a \in \mathbb{R}$ .
4.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ ,  $\forall \omega \in \text{Alt}_k(V)$  y  $\eta \in \text{Alt}_l(V)$ .

**Definición 1.11.** Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, definimos  $T^* : \text{Alt}_k W \rightarrow \text{Alt}_k V$  mediante

$$T^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(T(v_1), \dots, T(v_k)), \quad \forall \omega \in \text{Alt}_k W, v_1, \dots, v_k \in V.$$

**Proposición 1.12.** 1. Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces  $T^* : \text{Alt}_k W \rightarrow \text{Alt}_k V$  también es lineal.

2.  $\text{id}^* = \text{id} : \text{Alt}_k W \rightarrow \text{Alt}_k V$ .

3. Si  $S : U \rightarrow V$  y  $T : V \rightarrow W$  son transformaciones lineales, entonces  $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ .

4. Si  $T : V \rightarrow W$  es un isomorfismo, entonces  $T^* : \text{Alt}_k W \rightarrow \text{Alt}_k V$  es un isomorfismo y verifica  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} : \text{Alt}_k V \rightarrow \text{Alt}_k W$ .

**Proposición 1.13.** Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in W^*$ , entonces

$$T^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = T^*(\alpha_1) \wedge \dots \wedge T^*(\alpha_k) \in \text{Alt}_k V.$$

*Dem.*

$$\begin{aligned} T^*(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(v_1, \dots, v_k) &= (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(T(v_1), \dots, T(v_k)) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1(T(v_1)) & \dots & \alpha_1(T(v_k)) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(T(v_1)) & \dots & \alpha_k(T(v_k)) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} T^*(\alpha_1)(v_1) & \dots & T^*(\alpha_1)(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ T^*(\alpha_k)(v_1) & \dots & T^*(\alpha_k)(v_k) \end{vmatrix} \\ &= (T^*(\alpha_1) \wedge \dots \wedge T^*(\alpha_k))(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

**Corolario 1.14.** Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal y  $\omega \in \text{Alt}_k(V)$ ,  $\eta \in \text{Alt}_l(W)$ , entonces

$$T^*(\omega \wedge \eta) = T^*(\omega) \wedge T^*(\eta).$$

□

**Proposición 1.15.** Si  $\dim V = n$ ,  $T : V \rightarrow V$  es una transformación lineal y  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V$ , entonces

$$T^*(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*) = \det(T) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*.$$

*Dem.* Si  ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$ , es  $e_k^*(T(e_i)) = e_k^*\left(\sum_{j=1}^n a_{ji} e_j\right) = a_{ki}$ ,  $\forall i, k = 1, \dots, n$ . Luego aplicando (2) a  $T^*(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} T^*(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*) &= T^*(e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(e_1, \dots, e_n) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* = (e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*)(T(e_1), \dots, T(e_n)) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \\ &= \begin{vmatrix} e_1^*(T(e_1)) & \dots & e_1^*(T(e_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ e_n^*(T(e_1)) & \dots & e_n^*(T(e_n)) \end{vmatrix} e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \\ &= \det(T) e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*. \end{aligned}$$

□

## 2. Formas diferenciales en variedades

**Definición 2.1.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ . Una  $k$ -forma en  $M$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) es una familia  $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$  tal que  $\omega_p \in \text{Alt}_k(T_p M)$ , para todo  $p \in M$ . Una  $0$ -forma es una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sea  $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$  una  $k$ -forma en  $M$ . Si  $p \in M$  y  $X : U \rightarrow V$  es una parametrización con  $p = X(q)$ ,  $q \in U$ . Sabemos que  $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$  es una base de  $T_p M$ , luego existen escalares  $a_{i_1, \dots, i_k}(p)$  únicos tales que

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(p) X_{i_1}(q)^* \wedge \dots \wedge X_{i_k}(q)^*. \quad (3)$$

Haciendo variar  $p$  en  $V$ , la fórmula anterior nos define funciones  $a_{i_1, \dots, i_k} : V \rightarrow \mathbb{R}$ , para todo  $i_1, \dots, i_k$  en  $\{1, \dots, n\}$  con  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Decimos que  $\omega$  es *diferenciable en  $p$*  si todas las  $a_{i_1, \dots, i_k}$  son de clase  $C^\infty$  en  $p$ . Se prueba que esta definición no depende de la elección de la parametrización  $X$  (la prueba se basa en que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo). Una *forma diferencial* es una forma que es diferenciable en  $p$ , para todo  $p \in M$ . De ahora en adelante solo trabajaremos con formas diferenciales, por lo cual la palabra “forma” será sinónimo de “forma diferencial”.

Sean

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) &= \{\omega = \{\omega_p\}_{p \in M} : \omega \text{ } k\text{-forma en } M\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \Omega^0(M) &= C^\infty(M) \text{ el conjunto de las funciones diferenciables de } M \text{ en } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observar que si  $k > n = \dim M$ , entonces  $\Omega^k(M) = \{0\}$ .

*Observación 2.2.* Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $\alpha : I \rightarrow C$  una parametrización de  $C$ . Para cada  $t \in I$  el conjunto unitario  $\{\alpha'(t)\}$  es base de  $T_{\alpha(t)} C$ . Sea  $\{\alpha'(t)^*\}$  la base dual en  $(T_{\alpha(t)} C)^*$ . Es decir que  $\alpha'(t)^* : T_{\alpha(t)} C \rightarrow \mathbb{R}$  es la única funcional lineal que verifica  $\alpha'(t)^*(\alpha'(t)) = 1$ . Si  $\omega = \{\omega_p\}_{p \in C}$  es una 1-forma en  $C$ , entonces existe una función  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\omega_{\alpha(t)} = a(t) \alpha'(t)^*, \quad \forall t \in I.$$

La condición de que  $\omega$  sea una forma diferencial equivale a que  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  sea una función  $C^\infty$ .

*Observación 2.3.* Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto, entonces  $T_p U = \mathbb{R}^n$ , para todo  $p \in U$ . Luego si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $U$ , es  $\omega_p \in \text{Alt}_k(\mathbb{R}^n)$ , para todo  $p \in U$  y

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(p) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

con  $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ , siendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.4.** Si  $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ ,  $\nu \in \Omega^l(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  y  $a \in \mathbb{R}$  definimos  $\omega + \eta$ ,  $f\omega$ ,  $a\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\omega \wedge \nu \in \Omega^{k+l}(M)$  mediante

$$(\omega + \eta)_p := \omega_p + \eta_p, \quad (\omega \wedge \nu)_p := \omega_p \wedge \nu_p, \quad (f\omega)_p := f(p)\omega_p, \quad (a\omega)_p := a\omega_p, \quad \forall p \in M.$$

La definición anterior de  $\wedge$  presupone  $k, l \geq 1$ . Si  $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$  y  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , definimos

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega.$$

La prueba de la siguiente proposición es un ejercicio.

**Proposición 2.5.** Con estas definiciones  $\Omega^k(M)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y verifica:

- $\omega \wedge (\eta + \nu) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \nu$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta, \nu \in \Omega^l(M)$ .
- $(\eta + \nu) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \nu \wedge \omega$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta, \nu \in \Omega^l(M)$ .
- $\omega \wedge (\eta \wedge \nu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \nu$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ ,  $\nu \in \Omega^h(M)$ .
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ .
- $\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta)$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ . □

*Observación 2.6.* Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$  una parametrización de  $M$ . Observar que  $X_1^*, \dots, X_n^*$  son 1-formas en  $V$ , definiendo  $X_i^* = \{X_i(q)^*\}_{p \in V}$ , siendo  $q = X^{-1}(p)$ . Luego de (3) se deduce que si  $\omega \in \Omega^k(M)$ , entonces existen funciones  $a_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(V)$  tales que

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_k}^* \text{ en } \Omega^k(V).$$

Como un caso particular, si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie regular y  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$  es una parametrización de  $S$ , entonces toda 1-forma en  $V$  es del tipo

$$a X_u^* + b X_v^*, \quad a, b \in C^\infty(V),$$

y toda 2-forma en  $V$  es del tipo

$$a X_u^* \wedge X_v^*, \quad a \in C^\infty(V).$$

## 2.1. El pull-back

**Definición 2.7.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable entre variedades. Para cada  $k = 0, 1, \dots$  definimos  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  mediante:

Si  $k = 0$ , es  $f^* : \Omega^0(N) = C^\infty(N) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M)$  definido por  $f^*(g) := g \circ f$ .

Sea  $k \geq 1$  y  $\omega \in \Omega^k(N)$ . Observar que si  $p \in M$ , entonces  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  es lineal, por lo tanto podemos considerar  $(df_p)^* : \text{Alt}_k(T_{f(p)}N) \rightarrow \text{Alt}_k(T_pM)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Definimos  $f^*(\omega) = \{f^*(\omega)_p\}_{p \in M}$ , siendo  $f^*(\omega)_p := (df_p)^*(\omega_{f(p)})$ , para todo  $p \in M$ , es decir

$$f^*(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T_pM.$$

La forma  $f^*(\omega)$  se llama el *pull-back* de  $\omega$  por  $f$ .

Las siguientes propiedades se deducen de las correspondientes en formas multilineales.

**Proposición 2.8.** Si  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow P$  son mapas diferenciables y  $\omega, \eta \in \Omega^k(N)$ ,  $\nu \in \Omega^l(N)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $g \in C^\infty(N)$ , entonces

- $f^*(a\omega + \eta) = a f^*(\omega) + f^*(\eta)$ .
- $f^*(\omega \wedge \nu) = f^*(\omega) \wedge f^*(\nu)$ .
- $f^*(g\omega) = (g \circ f) f^*(\omega)$ .
- $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ .
- $\text{id}^* = \text{id}$ . □

**Corolario 2.9.** Si  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo, entonces  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  es un isomorfismo lineal y  $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N)$ , para todo  $k = 0, 1, \dots$  □

## 2.2. La derivada exterior en $\mathbb{R}^n$

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $f \in C^\infty(U)$ , definimos  $df = \{df_p\}_{p \in M} \in \Omega^1(U)$ , siendo  $df_p \in \text{Alt}_1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$  el diferencial de  $f$  en  $p$ ,

$$df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i, \quad \forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Variando  $f$  en  $C^\infty(U)$  tenemos definido el operador  $d : C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ .

Observar que si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces cada  $e_i^* \in (\mathbb{R}^n)^*$  es la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada, luego

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i^*, \quad \forall p \in U. \quad (4)$$

Esto prueba que  $df$  es una forma diferencial.

Es un ejercicio el verificar que  $d : C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  es un mapa lineal y verifica

$$d(fg) = g df + f dg, \quad \forall f, g \in C^\infty(U).$$

Para  $i = 1, \dots, n$ , sea  $\pi_i = e_i^*|_U : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Observar que  $\pi_i \in C^\infty(U)$  y es  $d\pi_i \in \Omega^1(U)$ , siendo  $(d\pi_i)_p = e_i^*$ , para todo  $p \in U$ . Es decir  $(d\pi_i)_p(v_1, \dots, v_n) = v_i$ , para todo  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ . Lo habitual es llamar  $x_i$  a  $\pi_i$ , luego tenemos  $dx_1, \dots, dx_n \in \Omega^1(U)$ , con

$$(dx_i)_p = e_i^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall p \in U, \quad (dx_i)_p(v_1, \dots, v_n) = v_i, \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Con estas definiciones la fórmula (4) se puede escribir  $df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) (dx_i)_p$ ,  $\forall p \in M$ , es decir

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Análogamente deducimos que si  $\omega$  es una  $k$ -forma en  $U$ , es

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

con  $a_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ .

**Ejemplo 2.10.** En el caso particular de  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ , se suele escribir  $dx, dy, dz$  en lugar de  $dx_1, dx_2, dx_3$ , luego

$$\begin{aligned} \Omega^0(U) &= C^\infty(U), \\ \Omega^1(U) &= \{a dx + b dy + c dz : a, b, c \in C^\infty(U)\}, \\ \Omega^2(U) &= \{a dx \wedge dy + b dy \wedge dz + c dz \wedge dx : a, b, c \in C^\infty(U)\}, \\ \Omega^3(U) &= \{a dx \wedge dy \wedge dz : a \in C^\infty(U)\}. \end{aligned}$$

En particular, si  $f \in C^\infty(U)$  es  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ .

**Ejemplo 2.11.** La forma  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$  se llama el *elemento de volumen* en  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Recordando el ejemplo 1.8, observar que

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_p(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n), \quad \forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, p \in U.$$

**Definición 2.12.** Definimos la *derivada exterior*  $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  mediante:

- Si  $k = 0$ ,  $d : \Omega^0(U) = C^\infty(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  es el operador definido anteriormente.
- Si  $k \geq 1$  y  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U)$ , definimos  $d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$  mediante

$$\begin{aligned} d\omega &:= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Observar que  $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0$ . La derivada exterior tiene las propiedades que vimos al principio del curso y que resumimos en la siguiente proposición.

**Proposición 2.13.** ▪ *El mapa  $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.*

- *Si  $\omega$  es una  $k$ -forma y  $\eta$  es una  $l$ -forma, entonces*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \quad (5)$$

*En particular si  $f \in C^\infty(U)$  y  $\omega$  es una  $k$ -forma, entonces  $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$ .*

- *Para toda  $k$ -forma  $\omega$  es  $d(d\omega) = 0$ .* □

Sean  $x_1, \dots, x_n$  las coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  e  $y_1, \dots, y_m$  las coordenadas en  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposición 2.14.** Si  $f = (f^1, \dots, f^m) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  es un mapa diferenciable entre conjuntos abiertos, entonces

$$f^*(dy_i) = d(f^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_j} dx_j, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

*Dem.* Si  $p \in U$  y  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , es

$$df_p(v) = \left( \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(p) v_1 + \dots + \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(p) v_n, \dots, \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(p) v_1 + \dots + \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(p) v_n \right),$$

luego

$$\begin{aligned} f^*(dy_i)_p(v) &= (dy_i)_{f(p)}(df_p(v)) = e_i^*(df_p(v)) = \frac{\partial f^i}{\partial x_1}(p) v_1 + \dots + \frac{\partial f^i}{\partial x_n}(p) v_n \\ &= \frac{\partial f^i}{\partial x_1}(p) (dx_1)_p(v) + \dots + \frac{\partial f^i}{\partial x_n}(p) (dx_n)_p(v). \end{aligned}$$

□

*Observación 2.15.* Observar que de las proposiciones 2.8 y 2.14 se deduce

$$f^* \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} a_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} (a_{i_1, \dots, i_k} \circ f) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

**Ejemplo 2.16.** Sean  $U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ ,  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$  y  $f : U \rightarrow V$  definida por  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Luego  $f = (f^1, f^2)$ , siendo  $f^1(r, \theta) = r \cos \theta$  y  $f^2(r, \theta) = r \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} f^*(dx) &= df^1 = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ f^*(dy) &= df^2 = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Luego si  $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ , entonces

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= (a \circ f) df^1 + (b \circ f) df^2 \\ &= a(r \cos \theta, r \sin \theta)(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + b(r \cos \theta, r \sin \theta)(\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta). \end{aligned}$$

Observar que  $f^*(\omega)$  se obtiene realizando en  $\omega$  la sustitución

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta &\Rightarrow dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ y = r \sin \theta &\Rightarrow dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos concretos. Si  $\omega = x dx + y dy$ , entonces

$$\begin{aligned} f^*(\omega) &= r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + r \sin \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r dr. \end{aligned}$$

Si  $\mu = dx \wedge dy$  el elemento de volumen en  $V$ , entonces

$$\begin{aligned} f^*(\mu) &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Si  $\nu = (x^2 + y^2) dx \wedge dy$ , entonces

$$f^*(\nu) = ((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2) (r dr \wedge d\theta) = r^3 dr \wedge d\theta.$$

**Proposición 2.17.** Si  $f = (f^1, \dots, f^m) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  es un mapa diferenciable entre conjuntos abiertos, entonces  $d \circ f^* = f^* \circ d$ , es decir

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega^k(V), \quad k = 0, 1, \dots$$

*Dem.*

1. Caso  $k = 0$ . Sea  $a \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$ .

$$\begin{aligned} f^*(da) &= f^* \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial a}{\partial y_j} dy_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f \right) f^*(dy_j) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f \right) d(f^j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f \right) \frac{\partial f^j}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f \right) \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \right) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(a \circ f)}{\partial x_i} dx_i \\ &= d(a \circ f) = d(f^*(a)). \end{aligned}$$

2. Caso  $\omega = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ , con  $1 \leq k \leq m$ ,  $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ .

$$d(f^*(\omega)) = d(df^1 \wedge \dots \wedge df^k) = 0.$$

Observar que la última igualdad se deduce de aplicar iteradamente (5) y la relación  $d^2 = 0$ . Por otro lado es  $d\omega = 0$ , luego  $f^*(d\omega) = 0$ .

3. Caso general. Observar que  $f^*$  y  $d$  son transformaciones lineales, luego basta con probarlo para el caso en que  $\omega = a \eta = a \wedge \eta$ , siendo  $a \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$  y  $\eta = dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ .

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) &= f^*(d(a \wedge \eta)) = f^*(da \wedge \eta + a \wedge d\eta) = f^*(da) \wedge f^*(\eta) + f^*(a) \wedge f^*(d\eta), \\ d(f^*(\omega)) &= d(f^*(a \wedge \eta)) = d(f^*(a) \wedge f^*(\eta)) = d(f^*(a)) \wedge f^*(\eta) + f^*(a) \wedge d(f^*(\eta)). \end{aligned}$$

Por lo probado anteriormente es  $f^*(da) = d(f^*(a))$  y  $f^*(d\eta) = d(f^*(\eta)) = 0$ , luego  $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))$ .  $\square$

**Proposición 2.18.** Si  $M$  es una variedad,  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$  es una parametrización de  $M$ ,  $u_1, \dots, u_n$  son las coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  y consideramos  $X^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U)$ , entonces

$$X^* \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} X_{i_1}^* \wedge \dots \wedge X_{i_k}^* \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (a_{i_1, \dots, i_k} \circ X) du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_k}.$$

*Dem.* Observar que por las propiedades del pull-back, alcanza con probar:

$$X^*(X_i^*) = du_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $X_i(q) = dX_q(e_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , luego

$$X^*(X_i^*)_q(e_j) = X_i(q)^*(dX_q(e_j)) = X_i(q)^*(X_j(q)) = \delta_{ij} = e_i^*(e_j) = (du_i)_q(e_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad q \in U.$$

$\square$

### 2.3. Derivada exterior en variedades

La derivada exterior en una variedad  $M$  se define de forma tal que coincida con la anterior, en el caso en que  $M$  sea un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y que si  $X : U \rightarrow V$  es una parametrización de  $M$  y  $\omega \in \Omega^k(V)$ , entonces  $X^*(d\omega) = d(X^*(\omega))$ .

**Definición 2.19.** Si  $M$  es una variedad, definimos la *derivada exterior*  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  mediante:

- Si  $k = 0$ ,  $d : \Omega^0(M) = C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  se define por  $df = \{df_p\}_{p \in M}$ , siendo  $df_p \in (T_p M)^*$  el diferencial de  $f$  en  $p$ , para todo  $f \in C^\infty(M)$ .
- Si  $k \geq 1$ ,  $\omega \in \Omega^k(M)$ , definimos  $d\omega = \{(d\omega)_p\}_{p \in M} \in \Omega^{k+1}(M)$  por lo siguiente. Sea  $p \in M$  y  $X : U \rightarrow V$  es una parametrización con  $p = X(q) \in V$ , definimos

$$(d\omega)_p := \left( (X^*)^{-1} \circ d \circ X^* \right) (\omega_p) = \left( (X^{-1})^* \circ d \circ X^* \right) (\omega_p). \quad (6)$$

En términos de coordenadas, si

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(p) X_{i_1}(q)^* \wedge \dots \wedge X_{i_k}(q)^*,$$

entonces

$$(d\omega)_p := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (a_{i_1, \dots, i_k} \circ X)}{\partial x_j}(q) X_j(q)^* \wedge X_{i_1}(q)^* \wedge \dots \wedge X_{i_k}(q)^*.$$

Hay que probar que en (6) la definición de  $(d\omega)_p$  no depende de la elección de la parametrización  $X$ . Sea  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow V$  otra parametrización y  $h = \tilde{X}^{-1} \circ X$ . Luego,

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} \circ h \Rightarrow X^* = h^* \circ \tilde{X}^* \Rightarrow (X^*)^{-1} = (\tilde{X}^*)^{-1} \circ (h^*)^{-1} \Rightarrow \\ (X^*)^{-1} \circ d \circ X^* &= (\tilde{X}^*)^{-1} \circ (h^*)^{-1} \circ d \circ h^* \circ \tilde{X}^* = (\tilde{X}^*)^{-1} \circ (h^*)^{-1} \circ h^* \circ d \circ \tilde{X}^* = (\tilde{X}^*)^{-1} \circ d \circ \tilde{X}^*. \end{aligned}$$

Observar que en la segunda línea aplicamos la Proposición 2.17.

En la siguiente proposición resumimos las principales propiedades de la derivada exterior en variedades, las cuales se deducen de las correspondientes en  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 2.20.** Sean  $M$  y  $N$  variedades,  $f : M \rightarrow N$  un mapa diferenciable y  $k = 0, 1, \dots$ , entonces

- El mapa  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.
- Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega^l(M)$ , entonces  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ .
- Para toda  $\omega \in \Omega^k(M)$  es  $d(d\omega) = 0$ .
- La derivada exterior y el pull-back conmutan, es decir  $d(f^*(\mu)) = f^*(d(\mu))$ , para todo  $\mu \in \Omega^k(N)$ .  $\square$

*Observación 2.21.* En todo lo anterior las variedades eran sin borde, pero lo visto vale también para variedades con borde.

**Definición 2.22.** Si  $M \subset \mathbb{R}^l$  es una variedad,  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^l$  es el mapa inclusión y  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^l)$ , llamamos la *restricción* de  $\omega$  a  $M$  a la forma  $i^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ . Observar que

$$i^*(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_p(v_1, \dots, v_k), \quad \forall p \in M, v_1, \dots, v_k \in T_p M.$$

Por esta razón, cuando no haya lugar a confusión, a la restricción de  $\omega$  a  $M$  la escribiremos  $\omega$  en vez de  $i^*(\omega)$ .

Análogamente si  $M$  es una variedad con borde, entonces la inclusión  $i : \partial M \hookrightarrow M$  es un mapa diferenciable y para cada  $\omega \in \Omega^k(M)$  tenemos que  $i^*(\omega) \in \Omega^k(\partial M)$ . También escribiremos  $\omega$  en vez de  $i^*(\omega)$ .

## 2.4. Formas en curvas y superficies

**Definición 2.23.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  una curva regular orientada y  $T : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo que define la orientación de  $C$ . Escribimos  $T = (T^1, T^2, T^3)$ , siendo  $T^1, T^2, T^3 : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos una 1-forma  $ds$  en  $C$  llamada el *elemento de arco* mediante

$$ds = \{ds_p\}_{p \in C}, \quad ds_p(w) := \langle w, T(p) \rangle, \quad \forall p \in C, w \in T_p C.$$

Observar que se escribe  $ds$  aunque en general **no es** la derivada exterior de una 0-forma en  $C$ .

*Observación 2.24.* En la definición anterior hay que probar que la 1-forma  $ds$  es diferenciable. Sea  $\alpha : I \rightarrow C$  una parametrización compatible con la orientación de  $C$ , es decir  $T(\alpha(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ ,  $\forall t \in I$ , luego

$$ds_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \left\langle \alpha'(t), \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\rangle = \|\alpha'(t)\|, \quad \forall t \in I. \quad (7)$$

Por lo tanto

$$ds_{\alpha(t)} = ds_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) (\alpha'(t))^* = \|\alpha'(t)\| (\alpha'(t))^*, \quad \forall t \in I.$$

Al ser  $t \mapsto \|\alpha'(t)\|$  un mapa  $C^\infty$  en  $I$ , deducimos que  $ds$  es una forma diferenciable.

**Proposición 2.25.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  una curva regular orientada y  $T = (T^1, T^2, T^3) : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo que define la orientación de  $C$ . Se consideran  $dx, dy$  y  $dz$  en  $\Omega^1(C)$  por restricción a  $C$  de las mismas formas en  $\mathbb{R}^3$  (es decir escribimos  $dx$  cuando tendríamos que escribir  $i^*(dx)$ , siendo  $i : C \rightarrow \mathbb{R}^3$  la inclusión, etc). Entonces en  $\Omega^1(C)$  se verifican las siguientes relaciones:

$$ds = T^1 dx + T^2 dy + T^3 dz, \quad dx = T^1 ds, \quad dy = T^2 ds, \quad dz = T^3 ds.$$

*Dem.* Sean  $p \in C$  y  $v = (x_0, y_0, z_0) \in T_p C$ .

$$ds_p(v) = \langle v, T(p) \rangle = x_0 T^1(p) + y_0 T^2(p) + z_0 T^3(p) = (T^1 dx + T^2 dy + T^3 dz)_p(v)$$

Observar que (7) implica  $ds_p(T(p)) = 1$ , luego  $\{ds_p\}$  es la base dual de  $\{T(p)\}$  en  $(T_p C)^*$ ,  $\forall p \in C$ .

$$dx_p = dx_p(T(p)) ds_p = e_1^*(T(p)) ds_p = T^1(p) ds_p \Rightarrow dx = T^1 ds.$$

Análogamente se prueba  $dy = T^2 ds$  y  $dz = T^3 ds$ . □

**Definición 2.26.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientada y  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo de versores normales obtenido a partir de la orientación de  $S$ . Definimos la 2-forma  $dA$  llamada el *elemento de área* en  $S$  mediante

$$dA = \{dA_p\}_{p \in S}, \quad dA_p(v, w) := \langle v \times w, N(p) \rangle = (v, w, N(p)), \quad \forall p \in S, \quad v, w \in T_p S.$$

siendo  $\times$  el producto vectorial y  $(\ , \ , \ )$  el producto mixto en  $\mathbb{R}^3$ . Observar que se escribe  $dA$  aunque en general **no es** la derivada exterior de una 1-forma en  $S$ .

*Observación 2.27.* En la definición anterior hay que probar que  $dA$  es una 2-forma diferenciable en  $S$ . La anticonmutatividad de  $\times$  implica que  $dA$  es una 2-forma alternada en  $S$ . Para probar que  $dA$  es una forma diferenciable, sea  $p \in S$  y  $X : U \rightarrow V$  una parametrización compatible con la orientación de  $S$  con  $p = X(q) \in V$ . Observar que  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  es una base de  $T_p S$  y que  $N(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|}$ , luego

$$\begin{aligned} dA_p &= dA_p(X_u(q), X_v(q)) X_u(q)^* \wedge X_v(q)^* = \left\langle X_u(q) \times X_v(q), \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|} \right\rangle X_u(q)^* \wedge X_v(q)^* \\ &= \|X_u(q) \times X_v(q)\| X_u(q)^* \wedge X_v(q)^*. \end{aligned}$$

Al ser  $q \mapsto \|X_u(q) \times X_v(q)\|$  un mapa  $C^\infty$  en  $U$ , se deduce que  $dA$  es una forma diferenciable.

**Proposición 2.28.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientada,  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  el campo de versores normales obtenido a partir de la orientación de  $S$  y  $dA$  el elemento de área de  $S$ . Escribimos  $N = (N^1, N^2, N^3)$ , con  $N^1, N^2, N^3 : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Se consideran  $dx, dy$  y  $dz$  en  $\Omega^1(S)$  por restricción a  $S$  de las mismas formas en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces en  $\Omega^2(S)$  se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} dA &= N^1 dy \wedge dz + N^2 dz \wedge dx + N^3 dx \wedge dy, \\ dy \wedge dz &= N^1 dA, \quad dz \wedge dx = N^2 dA, \quad dx \wedge dy = N^3 dA. \end{aligned}$$

*Dem.* Sean  $p \in S$  y  $v = (x_0, y_0, z_0), w = (x_1, y_1, z_1) \in T_p S$ .

$$\begin{aligned} dA_p(v, w) &= (v, w, N(p)) \\ &= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ N^1(p) & N^2(p) & N^3(p) \end{vmatrix} = N^1(p) \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} + N^2(p) \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix} + N^3(p) \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ &= (N^1 dy \wedge dz + N^2 dz \wedge dx + N^3 dx \wedge dy)_p(v, w). \end{aligned}$$

Afirmación: Si  $p \in S$ , entonces

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle u, N(p) \rangle dA_p(v, w) \quad \forall u \in \mathbb{R}^3, \quad v, w \in T_p S. \quad (8)$$

Prueba: sean  $v, w \in T_p S$ . Observar que  $v \times w$  es paralelo a  $N(p)$  y al ser  $\|N(p)\| = 1$  resulta

$$v \times w = \langle v \times w, N(p) \rangle N(p) = dA_p(v, w) N(p) \Rightarrow \langle u, v \times w \rangle = \langle u, dA_p(v, w) N(p) \rangle = dA_p(v, w) \langle u, N(p) \rangle.$$

Si sustituimos  $u$  por  $e_1$  en (8), obtenemos

$$N^1(p) dA_p(v, w) = \langle e_1, N(p) \rangle dA_p(v, w) = \langle e_1, v \times w \rangle = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (dy \wedge dz)_p(v, w), \quad \forall v, w \in T_p S.$$

Luego  $N^1 dA = dy \wedge dz$ ; análogamente sustituyendo  $u$  por  $e_2$  y  $e_3$  se obtienen las otras relaciones.  $\square$