II. Integrales de línea

1. Integración de 1-formas sobre caminos

Decimos que una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es *de clase* C^l, $l = 0,1,\ldots,\infty$ si existe una función $g : (c,d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^l, con $[a,b] \subset (c,d)$, tal que $g|_{[a,b]} = f$.

Definición 1.1. Un *camino* en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es una función $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to U$ que verifica que $\exists\ t_0, t_1, \ldots, t_m \in [a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, tales que $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \subset \mathbb{R} \to U$ es de clase C^1 ($\exists\ \gamma'(t)$ y es continua). Si $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$, diremos que γ *un camino de p a q*, que p es el *punto inicial* de γ y que q es el *punto final* de γ. Decimos que γ es un *camino cerrado* si además $\gamma(a) = \gamma(b)$. Un camino se dice *simple* si no tiene autointersecciones salvo eventualmente en los extremos.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\gamma : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^n$ un camino como en la definición anterior.
Escribimos $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$.

Si $\omega \in \Omega^1(U)$, $\omega = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n$, siendo $a_1, \cdots, a_n : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} a_1(\gamma(t))\,x_1'(t) + \cdots + a_n(\gamma(t))\,x_n'(t)\,dt.$$

Si γ es un camino cerrado se suele escribir $\oint_\gamma \omega$ en lugar de $\int_\gamma \omega$.

Ejemplo 1.2. Si γ es un camino constante, entonces $\int_\gamma \omega = 0$, $\forall \omega$.

En el caso $U \subset \mathbb{R}^2$, es $\omega = p\,dx + q\,dy$, siendo $p, q : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^∞ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$. Luego la fórmula anterior queda:

$$\int_\gamma p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(x(t),y(t))\,x'(t) + q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt.$$

Para poder recordar la fórmula anterior, observar que formalmente es como si en la integral $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ se realiza la sustitución

$$\begin{cases} x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)\,dt \\ y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)\,dt \end{cases}.$$

Ejemplo 1.3. Sean $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ y $\gamma : [0,2\pi] \to U$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, luego

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ y = \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = \cos t\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t)}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}dt + \frac{\cos t(\cos t)}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

De ahora en adelante es $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Operaciones con caminos.

1. Si $\gamma : [a,b] \to U$ es un camino, definimos $-\gamma : [-b,-a] \to U$ mediante $(-\gamma)(t) := \gamma(-t)$, $\forall t \in [-b,-a]$.
2. Si $\gamma_1 : [a,b] \to U$ y $\gamma_2 : [b,d] \to U$ caminos en U tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, definimos $\gamma_1 + \gamma_2 : [a,d] \to U$ mediante
$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & \text{si } t \in [b,d] \end{cases}$$
3. Si $\gamma : [a,b] \to U$ es un camino y $c \in \mathbb{R}$, definimos $\gamma_c : [a-c, b-c] \to U$ mediante $\gamma_c(t) := \gamma(t+c)$, $\forall t \in [a-c, b-c]$.
4. Si $\gamma_1 : [a,b] \to U$ y $\gamma_2 : [c,d] \to U$ son caminos en U tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, entonces el camino $(\gamma_2)_{c-b} : [b, d-c+b] \to U$ verifica $\gamma_1(b) = (\gamma_2)_{c-b}(b)$ y tiene sentido definir $\gamma_1 + \gamma_2 := \gamma_1 + (\gamma_2)_{c-b}$.
5. Si $\gamma_1 : [a,b] \to U$ y $\gamma_2 : [c,d] \to U$ son caminos en U tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, entonces tiene sentido definir $\gamma_1 - \gamma_2 := \gamma_1 + (-\gamma_2)$.

Observación 1.4.
1. Los mapas $-\gamma$, γ_c, $\gamma_1 + \gamma_2$ y $\gamma_1 - \gamma_2$ definidos arriba son caminos en U.
2. No confundir en las definiciones anteriores $(-\gamma)(t)$ con $-\gamma(t)$ ni $(\gamma_1 + \gamma_2)(t)$ con $\gamma_1(t) + \gamma_2(t)$.
3. Si γ es un camino cerrado en U y $n = 1, 2, \ldots$, tiene sentido definir
$$n\gamma := \underbrace{\gamma + \cdots + \gamma}_{n}.$$
Extendemos esta definición a $n \in \mathbb{Z}$ mediante $(-n)\gamma := n(-\gamma)$, $n > 0$ y 0γ es el camino constante por el punto inicial de γ.

Ejercicio 1.5. Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$, $c \in \mathbb{R}$. Probar

1. $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$, $\forall\ \gamma$.
2. $\int_{\gamma_c} \omega = \int_\gamma \omega$, $\forall\ \gamma$.
3. $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$, $\forall\ \gamma_1, \gamma_2$ tales que el punto final de γ_1 coincida con el punto inicial de γ_2.
4. $\int_{\gamma_1-\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$, $\forall\ \gamma_1, \gamma_2$ tales que el punto final de γ_1 coincida con el punto final de γ_2.
5. $\oint_{n\gamma} \omega = n \oint_\gamma \omega$, $\forall\ \gamma$ cerrado, $n \in \mathbb{Z}$.
6. $\int_\gamma \omega_1 + c\omega_2 = \int_\gamma \omega_1 + c \int_\gamma \omega_2$, $\forall\ \gamma$.

Proposición 1.6. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \Omega^1(U)$. Son equivalentes:*

1. $\int_\gamma \omega$ *es independiente del camino* γ
2. $\oint_\gamma \omega = 0$ *para todo camino cerrado* γ *en* U
3. ω *es exacta*

Dem. ($1 \Leftarrow 2$): Sean $p, q \in \mathbb{R}^2$ y γ_1, γ_2 dos caminos de p a q en U. El camino $\gamma_1 - \gamma_2$ es cerrado, luego

$$0 = \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

($1 \Rightarrow 2$): Si γ es un camino cerrado, entonces γ y $-\gamma$ son dos caminos que tienen el mismo punto inicial y final, luego

$$\oint_\gamma \omega = \oint_{-\gamma} \omega, \text{ pero } \oint_{-\gamma} \omega = -\oint_\gamma \omega \quad \Rightarrow \quad \oint_\gamma \omega = -\oint_\gamma \omega \quad \Rightarrow \quad \oint_\gamma \omega = 0.$$

($1 \Leftarrow 3$): Si $\omega \in \Omega^1(U)$ es exacta entonces existe $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ tal que $\omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. Sea $\gamma : [a,b] \to U$ camino, $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$ y $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ como en la Definición 1.1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial f}{\partial_{x_j}}(x_1(t), \dots, x_n(t))\, x_j'(t)\, dt = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial_{x_j}}(x_1(t), \dots, x_n(t))\, x_j'(t)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\, dt = \sum_{i=1}^m f(\gamma(t))|_{t_{i-1}}^{t_i} = \sum_{i=1}^m f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t_{i-1})) \\ &= f(\gamma(t_m)) - f(\gamma(t_0)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p).\end{aligned}$$

entonces $\int_\gamma \omega$ solo depende de los valores $f(q)$ y $f(p)$ y no del camino γ.

($1 \Rightarrow 3$):

Supondremos que U es conexo, si no descomponemos U en sus componentes conexas y aplicamos el razonamiento siguiente a cada componente.

Para simplificar la notación haremos la prueba para el caso $U \subset \mathbb{R}^2$, pero el razonamiento es completamente general.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto y conexo y $\omega = a\,dx + b\,dy \in \Omega^1(U)$ que tal que $\int_\gamma \omega$ es independiente del camino γ. Sea $p_0 \in U$ fijo. Observar que la hipótesis de conexión implica que para todo p en U existe un camino γ en U que une p_0 con p. Definimos una función $f : U \to \mathbb{R}$ mediante $f(p) = \int_\gamma \omega$, siendo γ un camino cualquiera en U de p_0 a p.

Sea $p = (x_1, y_1) \in U$ arbitrario. Probaremos que existe $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_1) - f(p)}{h}$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = a(p)$.

Sea γ un camino de p_0 a p. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que el segmento de p a $p + he_1$ está contenido en U, sea β_h el camino horizontal que une p con $p + he_1$: $\beta_h(t) = p + the_1 = (x_1 + th, y_1)$, $\beta_h : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Observar que $\alpha_h = \gamma + \beta_h$ es un camino en U de p_0 a $p + he_1$.

$$f(p+he_1) - f(p) = \int_{\alpha_h} \omega - \int_\gamma \omega = \int_{\gamma + \beta_h} \omega - \int_\gamma \omega = \int_{\beta_h} \omega = \int_0^1 a\,(x_1 + th, y_1)\, h\, dt = h \int_0^1 a\,(x_1 + th, y_1)\ dt.$$

Luego,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_1) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 a\,(x_1 + th, y_1)\ dt = \int_0^1 \lim_{h \to 0} a\,(x_1 + th, y_1)\ dt = \int_0^1 a\,(x_1, y_1)\ dt = a(x_1, y_1).$$

Análogamente se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = b(p)$, luego $df = \omega$. □

Ejemplo 1.7. En el Ejemplo 1.3 vimos que si $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, entonces $\oint_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$. Luego ω no es exacta (pero ω es cerrada).