I. Formas en $\mathbb{R}^n$

1. Formas en $\mathbb{R}^3$

Empezaremos dando un enfoque intuitivo del tema de formas diferenciales y más adelante daremos definiciones precisas. El objetivo de esta parte es aprender a operar con formas.

Definición 1.1. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$.

1. Una *0-forma* en U es una función $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞.
2. Una *1-forma* en U es una expresión del tipo $a\,dx + b\,dy + c\,dz$ en la cual $a, b, c : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^∞.
3. Una *2-forma* en U es una expresión del tipo $a\,dx\wedge dy + b\,dz\wedge dx + c\,dy\wedge dz$ en la cual $a, b, c : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^∞.
4. Una *3-forma* en U es una expresión del tipo $a\,dx \wedge dy \wedge dz$ en la cual $a : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞.

Las expresiones dx, dy, dz, $dx \wedge dy$, $dz \wedge dx$, $dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$ son sólo símbolos que por ahora no definiremos.

Llamaremos $C^\infty(U)$ al conjunto de las funciones de U en $\mathbb{R}$ de clase C^∞ y $\Omega^k(U)$ al conjunto de las k-formas en U, $k = 0, 1, 2, 3$. Definimos $\Omega^4(U) := \{0\}$.

Ejemplo 1.2. Ejemplos de formas definidas en todo $\mathbb{R}^3$:

- 0-formas: xyz; $\log\left(x^2 + y^2 + z^2 + 1\right)$.
- 1-formas: $x\,dx - y\,dy + z\,dz$; $yz\,dx + (2x + y)\,dz$.
- 2-formas: $x\,dx \wedge dy + 3\,dz \wedge dx + dy \wedge dz$; $dx \wedge dy$.
- 3-formas: $xy^2z\,dx \wedge dy \wedge dz$; $dx \wedge dy \wedge dz$.

Definición 1.3. Dos formas son *iguales* si son la misma. Por ejemplo

$$a\,dx \wedge dy + b\,dz \wedge dx + c\,dy \wedge dz = a'\,dx \wedge dy + b'\,dz \wedge dx + c'\,dy \wedge dz \quad \Leftrightarrow \quad a = a',\ b = b',\ c = c'.$$

Se define la suma y de dos 1-formas operando término a término:

$$(a\,dx + b\,dy + c\,dz + a'\,dx) + (a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz) = (a + a')\,dx + (b + b')\,dy + (c + c')\,dz.$$

Se define el producto de una función por una 1-forma de manera distributiva:

$$f(a\,dx + b\,dy + c\,dz) = (fa)\,dx + (fb)\,dy + (fc)\,dz.$$

Análogamente se define la suma de k-formas y el producto por una función por una k-forma para los otros valores de k. Definimos $\omega - \eta := \omega + (-1)\eta$.

Ejemplo 1.4. Ejemplos de operaciones con formas:

Si $\omega_1 = x^2y\,dx\wedge dy + x\,dz\wedge dx,\ \omega_2 = -x^2y\,dx\wedge dy + x\,dz\wedge dx + 3\,dy\wedge dz,\ f = xyz$. Entonces

$$\omega_1+\omega_2 = 2x\,dz\wedge dx + 3\,dy\wedge dz,\quad \omega_1-\omega_2 = 2x^2y\,dx\wedge dy - 3\,dy\wedge dz,\quad f\omega_1 = x^3y^2z\,dx\wedge dy + x^2yz\,dz\wedge dx.$$

Observar que con estas operaciones $\Omega^k(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (identificando los números reales con las funciones constantes). De hecho verifica las mismas propiedades que un $\mathbb{R}$-espacio vectorial si en vez de escalares consideramos las funciones f de $C^\infty(U)$.

Definición 1.5. Para todo $k, l = 0,1,2,3$ se define el producto

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(U)\times\Omega^l(U) & \stackrel{\wedge}{\to} & \Omega^{k+l}(U) \\ (\omega,\eta) & \mapsto & \omega\wedge\eta \end{array}$$

por lo siguiente. Si $k+l>3$ entonces $\omega\wedge\eta = 0$. Si $f\in\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ y $\omega\in\Omega^k(U)$ es $f\wedge\omega = \omega\wedge f = f\omega$. En los otros casos este producto es distributivo respecto a la suma y $C^\infty(U)$-lineal en cada factor (es decir, es un mapa $C^\infty(U)$-bilineal), es asociativo y verifica

$$dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0,\quad dy\wedge dx = -dx\wedge dy,\ dx\wedge dz = -dz\wedge dx,\ dz\wedge dy = -dy\wedge dz.$$

Observar que este producto no es conmutativo.

Ejemplo 1.6.

$$\begin{aligned} (xyz\,dx)\wedge(x\,dx + y\,dy + z\,dz) &= x^2yz\,dx\wedge dx + xy^2z\,dx\wedge dy + xyz^2\,dx\wedge dz \\ &= xy^2z\,dx\wedge dy - xyz^2\,dz\wedge dx. \\ (xyz\,dx)\wedge(y\,dz\wedge dx + z\,dy\wedge dz) &= xy^2z\,dx\wedge dz\wedge dx + xyz^2\,dx\wedge dy\wedge dz \\ &= xyz^2\,dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7. Verificar que si ω es una k-forma y η es una l-forma, entonces

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{kl}\eta\wedge\omega.$$

Definición 1.8. La *derivada exterior* que es un mapa $\Omega^k(U)\stackrel{d}{\to}\Omega^{k+1}(U)$, $k = 0,1,2,3$, que se define mediante:

- $k=0:\quad df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$
- $k=1:\quad d(a\,dx + b\,dy + c\,dz) = da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz.$
- $k=2:\quad d(a\,dx\wedge dy + b\,dz\wedge dx + c\,dy\wedge dz) = da\wedge dx\wedge dy + db\wedge dz\wedge dx + dc\wedge dy\wedge dz.$
- $k=3:\quad d(a\,dx\wedge dy\wedge dz) = 0.$

Ejercicio 1.9. Verificar la siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} d(a\,dx + b\,dy + c\,dz) &= \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)dy\wedge dz \\ d(a\,dx\wedge dy + b\,dz\wedge dx + c\,dy\wedge dz) &= \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned}$$

Observación 1.10. Si bien las fórmulas obtenidas en el ejercicio anterior permiten calcular la derivada exterior reemplazando a, b y c por los valores correspondientes, a nivel práctico es mucho mas útil recordar que la derivada exterior se obtiene sustituyendo una expresión del tipo $a\,dx\cdots$ por $da\wedge dx\cdots$ y luego operando.

Ejercicio 1.11. Verificar lo siguiente:

1. El mapa $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ es $\mathbb{R}$-lineal, es decir si $\omega, \eta \in \Omega^k(U)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, entonces
$$d\,(c_1\,\omega + c_2\,\eta) = c_1\,d\omega + c_2\,d\eta.$$
2. Si ω es una k-forma y η es una l-forma, entonces
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$
En particular esta fórmula implica que si $f \in C^\infty(U)$ y ω es una k-forma, es
$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f\,d\omega.$$

Teorema 1.12. *Para toda k-forma ω ($k = 0, 1, 2, 3$) es $d(d\omega) = 0$.*

Dem. Es solo relizar el cálculo para cada valor de k, usar las fórmulas del Ejercicio 1.9 y la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. ◻

Observación 1.13. El resultado del teorema anterior se suele citar como $d^2 = 0$ entendiendo $d^2 = d \circ d$.

Definición 1.14. Una k-forma ω ($k = 0, 1, 2, 3$) se dice *cerrada* si $d\omega = 0$ y se dice *exacta* si existe una $(k-1)$-forma η tal que $\omega = d\eta$. El teorema anterior implica que toda forma exacta es cerrada.

Observación 1.15.

1. La definición anterior tiene problemas para $k = 0$. En este caso asumimos que la única 0-forma exacta es la nula 0.
2. Observar que toda 3-forma es cerrada.

2. Campos en $\mathbb{R}^3$

Un *campo* (diferenciable) en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ es una función $F = (F_1, F_2, F_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F_1, F_2, F_3 : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de clase C^∞. Llamaremos $\mathfrak{X}(U)$ al conjunto de los campos en U.

Si $F, G \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$, definimos $F + G, fG \in \mathfrak{X}(U)$ mediante
$$(F + G)(x) = F(x) + G(x),\ (fG)(x) = f(x)\,G(x), \quad \forall x \in U.$$
Estas operaciones en $\mathfrak{X}(U)$ verifican las mismas propiedades de los espacios vectoriales y $\mathfrak{X}(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de la misma forma que lo es $\Omega^k(U)$.

- Si $f \in C^\infty(U)$, se define su *gradiente* $\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \in \mathfrak{X}(U)$.
- Si $F \in \mathfrak{X}(U)$, se define su *rotacional* $\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z},\ \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x},\ \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y}\right) \in \mathfrak{X}(U)$.
- Si $F \in \mathfrak{X}(U)$, se define su *divergencia* $\operatorname{div} F := \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \in C^\infty(U)$.

Observar que si introducimos el símbolo $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, entonces podemos escribir simbólicamente $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$ y $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$, siendo $\times$ y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto vectorial y escalar respectivamente de $\mathbb{R}^3$.

Luego tenemos definidos los siguientes operadores:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \mathfrak{X}(U) \\ f & \mapsto & \nabla f \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(U) \\ F & \mapsto & \nabla \times F \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\ F & \mapsto & \langle \nabla, F \rangle \end{array}.$$

A cada campo $F = \left(F^1, F^2, F^3\right) \in \mathfrak{X}(U)$ le asociamos las formas $\omega_F^1 \in \Omega^1(U)$ y $\omega_F^2 \in \Omega^2(U)$ y cada función $f \in C^\infty(U)$ le asociamos la forma $\omega_f^3 \in \Omega^3(U)$, definidas mediante:

$$\omega_F^1 = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz, \quad \omega_F^2 = F^3 dx \wedge dy + F^2 dz \wedge dx + F^1 dy \wedge dz, \quad \omega_f^3 = f dx \wedge dy \wedge dz$$

La prueba de lo siguiente consiste simplemente en realizar el cálculo y es un ejercicio del práctico.

Proposición 2.1. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\simeq"', "\text{id}"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\text{rot}"] \arrow[d, "\simeq"', "\omega^1_{(\ )}"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\text{div}"] \arrow[d, "\simeq"', "\omega^2_{(\ )}"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[d, "\simeq"', "\omega^3_{(\ )}"] \\ \Omega^0(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^3(U) \end{tikzcd}.$$

Es decir, para todo $F \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$ se verifica

$$df = \omega^1_{\nabla f}, \quad d\left(\omega_F^1\right) = \omega^2_{\text{rot}\, F}, \quad d\left(\omega_F^2\right) = \omega^3_{\text{div}\, F}.$$

$\square$

Combinando la Proposición anterior y el Teorema 1.12 se obtiene el siguiente:

Corolario 2.2. *Para todo $F \in \mathfrak{X}(U)$ y $f \in C^\infty(U)$ se verifica*

$$\text{rot}(\nabla f) = 0, \quad \text{div}(\text{rot}\, F) = 0.$$

$\square$

3. El complejo de De Rham

Dado U abierto en $\mathbb{R}^3$, el *complejo de De Rham* de U es la sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales:

$$\{0\} \xrightarrow{d=0} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \xrightarrow{d=0} \{0\}.$$

Llamamos $Z^k(U)$ al conjunto de las k-formas cerradas en U y $B^k(U)$ al conjunto de las k-formas exactas en U. Observar que al ser el mapa $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ un mapa $\mathbb{R}$-lineal obtenemos

$$\begin{aligned} Z^k(U) &= \left\{\omega \in \Omega^k(U) : \ d\omega = 0\right\} = \text{Ker}\left(\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U)\right) \\ B^k(U) &= \left\{\omega \in \Omega^k(U) : \ \exists \eta \in \Omega^{k-1}(U), \ \omega = d\eta\right\} = \text{Im}\left(\Omega^{k-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^k(U)\right), \end{aligned}$$

luego $Z^k(U)$ y $B^k(U)$ son subespacios de $\Omega^k(U)$ y tenemos $B^k(U) \subset Z^k(U) \subset \Omega^k(U)$.

El *k-ésimo grupo de cohomología* de U es el espacio cociente $H^k(U) := Z^k(U)/B^k(U)$, $k = 0,1,2,3$. Observar que $H^k(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Cada $H^k(U)$ mide “cuan lejos” están las k-formas cerradas de las exactas en U. En los extremos tenemos

$$H^0(U) = Z^0(U)/B^0(U) = Z^0(U)/\{0\} \simeq Z^0(U), \quad H^3(U) = Z^3(U)/B^3(U) = \Omega^3(U)/B^3(U).$$

Recordamos el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que verifica $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ en U para todo $i = 1, \dots, n$, entonces f es constante en U.* □

De ese resultado se deducen inmediatamente los siguientes:

Corolario 3.2. *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo y $f, g : U \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables que verifican $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ en U para todo $i = 1, \dots, n$, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$, $\forall\, x \in U$.* □

Corolario 3.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables que verifican $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ en U para todo $i = 1, \dots, n$. Sean U_α, $\alpha \in I$ las componentes conexas de U (U es unión disjunta de las U_α). Entonces para cada $\alpha \in I$ existe una constante $c_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c_\alpha$, $\forall\, x \in U_\alpha$.* □

Sea U abierto y escribimos $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, siendo $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ el conjunto de las componentes conexas de U. Si para cada $\alpha \in I$ definimos $\chi_\alpha : U \to \mathbb{R}$ por

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U_\alpha \\ 0 & \text{si } x \notin U_\alpha \end{cases},$$

entonces el Corolario 3.3 implica que $\{\chi_\alpha : \alpha \in I\}$ es una base de $Z^0(U)$, por lo cual obtenemos el siguiente:

Proposición 3.4. *Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto, entonces la dimensión de $H^0(U)$ coincide con el cardinal del conjunto de componentes conexas de U.* □

Ejemplo 3.5.

1. Si $U = \mathbb{R}^3$, es $\dim H^0(U) = 1$, luego $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$.
2. Si $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$, es $\dim H^0(U) = 1$, luego $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$.
3. Si $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$, es $\dim H^0(U) = 2$, luego $H^0(U) \simeq \mathbb{R}^2$.

4. Formas en $\mathbb{R}^n$

Todo lo anterior (menos los campos) se generaliza a $\mathbb{R}^n$ para todo valor de n.

Por ejemplo, si $x_1, \dots, x_n$ son las coordenadas en $\mathbb{R}^n$, entonces las k-formas en $\mathbb{R}^n$ tienen el siguiente aspecto:

- 1-formas: $a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \cdots + a_n\, dx_n$.
- 2-formas: $a_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}\, dx_1 \wedge dx_3 + \cdots + a_{n-1,n}\, dx_{n-1} \wedge dx_n = \sum_{i<j} a_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$.
- $(n-1)$-formas: $a_1\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + a_2\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + \cdots + a_n\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$.
- n-formas: $a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$.

Veremos rápidamente el aspecto de las formas y de la derivada exterior en los casos $n = 2$ y $n = 1$.

Formas en $\mathbb{R}^2$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto.

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U), \quad \Omega^1(U) = \{a\,dx + b\,dy : \ a, b \in C^\infty(U)\}, \quad \Omega^2(U) = \{a\,dx \wedge dy : \ a \in C^\infty(U)\},$$
$$\Omega^3(U) = \{0\}.$$

Derivada exterior:
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy, \quad d(a\,dx + b\,dy) = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Formas en $\mathbb{R}$.

Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto.

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U), \quad \Omega^1(U) = \{a\,dt : \ a \in C^\infty(U)\}, \quad \Omega^2(U) = \{0\}.$$

Derivada exterior: $df = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt = f'dt$.

5. Formas cerradas versus exactas

Vimos anteriormente que toda forma exacta es cerrada, ahora estudiaremos bajo qué condiciones se cumple el recíproco también, es decir bajo qué condiciones las formas exactas coinciden con las formas cerradas. Este problema es importante porque es mucho mas fácil verificar que una forma es cerrada a que es exacta.

El ejemplo que veremos a continuación es particularmente importante.

Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $\omega_0 = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega^1(U)$. Es un ejercicio el verificar que ω_0 es cerrada. Sea $V = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\big\}$. Observar que $V \subset U$.

Afirmación 1: ω_0 es exacta en V.

Sea $g : V \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \operatorname{Arctg}(y/x)$. Es un ejercicio el verificar que $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$, luego $\omega_0 = dg$ en V.

Afirmación: ω_0 no es exacta en U.

Supongamos que existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\omega_0 = df$. Como $V \subset U$ es $\omega_0 = df$ en V, luego $df = dg$ en V *i.e.* $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ en V. Sean $V^+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\big\}$ y $V^- = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0\big\}$ las componentes conexas de V. El Corolario 3.3 implica que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f = g + c_1$ en V^+ y $f = g + c_2$ en V^-.

Sea $p = (0, b),\ b > 0$.

$$f(0,b) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x,b) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{Arctg}(b/x) + c_2 = \pi/2 + c_2 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x,b) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{Arctg}(b/x) + c_1 = -\pi/2 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \pi/2 + c_2 = -\pi/2 + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 - \pi. \tag{1}$$

Sea $p = (0, c),\ c < 0$.

$$f(0,c) = \begin{cases} \text{lím}_{x\to 0^+} f(x,c) = \text{lím}_{x\to 0^+} \text{Arctg}\,(c/x) + c_2 = -\pi/2 + c_2 \\ \text{lím}_{x\to 0^-} f(x,c) = \text{lím}_{x\to 0^-} \text{Arctg}\,(c/x) + c_1 = \pi/2 + c_1 \end{cases} \Rightarrow -\pi/2 + c_2 = \pi/2 + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 + \pi. \tag{2}$$

Claramente de (1) y (2) llegamos a una contradicción, luego no existe ninguna función f en U tal que $\omega_0 = df$.

De lo anterior se deduce que para estudiar el problema de cuándo un forma cerrada es exacta importa el dominio de la forma.

Definición 5.1. Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ *tiene forma de estrella* si existe un punto $p_0 \in U$ tal que para todo $p \in U$ se cumple $\{tp + (1-t)p_0 :\ t \in [0,1]\} \subset U$.

En los casos en que necesitemos enfatizar el punto p_0, diremos que U tiene forma de estrella respecto a p_0. bservar que un conjunto con forma de estrella necesariamente es conexo.

Ejemplo 5.2.
1. Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella. En particular el propio $\mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) :\ x \geq 0\}$ tiene forma de estrella (y no es convexo).

Teorema 5.3 (Lema de Poincaré)**.** *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto con forma de estrella, entonces para todo $k = 0, 1, \dots, n$ se cumple que toda k-forma cerrada en U es exacta.*

Para simplificar la notación haremos la prueba para 1-formas en $U \subset \mathbb{R}^3$ con forma de estrella respecto al origen $(0,0,0)$.

Dem. Sea $\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz \in \Omega^1(U)$ tal que $d\omega = 0$. Luego

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial z}. \tag{3}$$

Como U tiene forma de estrella respecto al origen, tiene sentido definir $f : U \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(X) = \int_0^1 x\,a(tX) + y\,b(tX) + z\,c(tX)\,dt, \quad \forall\ X = (x,y,z) \in U.$$

Calculando obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(X) &= \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 x\,a(tX) + y\,b(tX) + z\,c(tX)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,a(tX) + y\,b(tX) + z\,c(tX)\right)\,dt \\
&= \int_0^1 a(tX) + x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(a(tX)\right) + y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(b(tX)\right) + z\,\frac{\partial}{\partial x}\left(c(tX)\right)\,dt \\
&= \int_0^1 a(tX) + x\,\frac{\partial a}{\partial x}(tX)\,t + y\,\frac{\partial b}{\partial x}(tX)\,t + z\,\frac{\partial c}{\partial x}(tX)\,t\,dt \\
&\overset{(3)}{=} \int_0^1 a(tX) + x\,\frac{\partial a}{\partial x}(tX)\,t + y\,\frac{\partial a}{\partial y}(tX)\,t + z\,\frac{\partial a}{\partial z}(tX)\,t\,dt \\
&= \int_0^1 a(tX) + \frac{d}{dt}(a(tX))\,t\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(a(tX)t)\,dt \\
&= a(tX)t|_{t=0}^{t=1} \\
&= a(X).
\end{aligned}
$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ y análogamente se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = c$, es decir $df = \omega$. $\square$

Ejemplo 5.4. Sea $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0):\ x \geq 0\}$ y consideremos $\omega_0 = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega^1(V)$. El conjunto V tiene forma de estrella, luego el Lema de Poincaré nos asegura que ω_0 es exacta en V.

Sean $W = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2:\ r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ y $f: W \to V$ definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ (f es el cambio a coordenadas polares). Es un ejercicio del práctico el probar que el sistema de ecuaciones

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}
$$

definen $r, \theta : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como funciones C^∞ de x e y y se cumple que $\omega = d\theta$ en V.

Observación 5.5. 1. El Lema de Poincaré implica que toda forma cerrada en $\mathbb{R}^n$ es exacta, luego $H^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$ y $H^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, $\forall\, k \geq 1$.

2. Si $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0):\ x \geq 0\}$, es $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$ y $H^1(U) = H^2(U) = \{0\}$.

3. Si $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, es $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$ y $H^1(U) \neq \{0\}$.