Práctico 2: Nociones topológicas elementales de $\mathbb{R}^n$ (última parte)

1. Hacer un croquis del dominio, y los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones x^2+y^2, x^2-y^2, x^2, y/x, xy.

2. Sea $f(x,y)=(x^2-y)/2x$, graficar:
$z=f(x,x^2)$, $z=f(x,0)$, $z=f(x,1)$, $z=f(x,x)$.

3. Probar que en los siguientes casos no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad f(x,y)=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & si\ x+y\neq 0 \\ 0, & si\ x+y=0 \end{cases}$$

4. (a) Sean $f,g:U(\subset\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, y $a\in U$. Probar que si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y g es una función acotada en alguna bola reducida de centro a, entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.
(b) Calcular los límites de la siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \frac{xy^3}{x^2+y^4}$$

5. (a) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ y existen los límites unidimensionales: $\lim_{x\to a} f(x,y)$ y $\lim_{y\to b} f(x,y)$ entonces existen los límites iterados y:

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)=L$$

(b) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$ existen en $(0,0)$ pero son distintos. Comentar.

(c) Verificar que los límites iterados de $f(x,y)=(x^2y^2)/(x^2y^2+(x-y)^2)$ existen y son iguales en $(0,0)$ pero no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Comentar.

(d) Se considera $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\operatorname{sen}(1/y), & \text{si } y\neq 0 \\ 0, & \text{si } y=0. \end{cases}$$

Mostrar que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, pero un límite iterado no existe. ¿Esto contradice la parte (a)?

6. Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ y\ \log|\ y\ | \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

7. Se considera $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Mediante el cambio de variable $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, con $\theta\in[0,2\pi)$ obtenemos $f(x,y)=g(r,\theta)$.

(a) Supongamos que $g(r,\theta) = f_1(r)f_2(\theta)$. Probar que si f_2 está acotada en $[0,2\pi)$ y $\lim_{r\to 0} f_1(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(b) ¿Qué sucede si f_2 no está acotada?

(c) Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(d) Demostrar o dar un contraejemplo:

$$\forall\theta \in [0,2\pi) \lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0, \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

8. Sean $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, a de acumulación de $X \subset \mathbb{R}^n$, $g\colon Y \to \mathbb{R}^p$, b de acumulación de Y, $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$. Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Demostrar o dar un contrajemplo:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c.$$

9. Demostrar la equivalencia entre (a) $f(x)$ es continua en a y (b) Para toda sucesión $(x_k) \subset X$, $x_k \underset{k}{\longrightarrow} a$ se verifica $f(x_k) \underset{k}{\longrightarrow} f(a)$.

10. Demostrar que la función f es continua en un punto a, si y sólo si, son continuas sus funciones coordenadas en a.

11. En cada caso hallar el dominio y estudiar la continuidad de f, donde f está definida por las siguientes fórmulas:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \quad f(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad f(x,y) = \operatorname{Arcsen}\big(x/\sqrt{x^2+y^2}\big)$$

12. Investigar la continuidad de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ 0, & \text{si } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

13. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que:

(a) Si $f(x) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f\big(B(x,\delta)\big) > 0$. (Conservación del signo.)

(b) $\{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) > a\} = f^{-1}(a,+\infty)$ es un conjunto abierto.

(c) $\{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) < a\} = f^{-1}(-\infty,a)$ es un conjunto abierto.

14. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que:

(a) Si A es abierto $f^{-1}(A)$ es abierto.

(b) $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = a\}$ es un conjunto cerrado.

Utilizando (b) demostrar que el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

es un conjunto cerrado.

15. (a) Demostrar que la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

(b) Estudiar la continuidad uniforme de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(0, 1)$.

(c) Estudiar la continuidad uniforme de $f(x) = \cos\left(x^2\right)$ en los intervalos $[0, 2\pi]$ y $\mathbb{R}$.

16. Una función $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *lipschitziana*, cuando existe $k > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

(a) Probar que una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lipschitziana, determinando una constante que verifique la definición.

(b) Probar que una norma $N(x)$ definida en $\mathbb{R}^n$ es una función lipschitziana, y determinar una constante que verifique la definición.

(c) Probar que toda función lipschitziana es uniformemente continua.

(d) Probar que $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no lipschitziana.

17. Probar que los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son cerrados con interior vacío.

18. Demostrar que (a) la unión de una familia finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto; (b) la intersección de una familia arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto; (c) El producto cartesiano de un conjunto finito de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

19. Demostrar que si toda cobertura por conjuntos abiertos para un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite una subcobertura finita, entonces el conjunto X es cerrado y acotado, es decir, X es compacto. (Se trata del recíproco del teorema 18 de las notas.)

20. Encontrar coberturas por abiertos que no admitan subcoberturas finitas de los siguientes conjuntos:

$$a)(0, 1] \qquad b)[0, +\infty)$$

21. (a) Recordando que $\mathbb{R}$ es conexo demostrar que son conexos los conjuntos $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$. (b) Demostrar que un intervalo arbitrario es conexo. (c) Demostrar que un conjunto conexo en la recta es un intervalo.

22. Demostrar que un conjunto *convexo* es *conexo*. ¿Es cierto el recíproco?