

Práctico 1: Nociones topológicas elementales de \mathbb{R}^n (primera parte)

1. Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Demostrar que $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ es un producto interno.

2. (a) Investigar si las siguientes funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} son normas

(i) $N(x, y) = |x| + |y|$,

(ii) $N(x, y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$,

(iii) $N(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$,

(iv) $N(x, y) = |x + y|$.

(b) Para aquellas que sean normas dibujar la bola de centro en el origen y radio 1, e indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro $(3, 4)$ y radio 2: $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(0, 1)$.

3. Probar que toda bola en \mathbb{R}^n es convexa.

(Sugerencia: Mostrarlo primero para bolas centradas en el origen).

4. (a) Demostrar que $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ y $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ son normas en \mathbb{R}^n .

(b) Demostrar que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \text{para todo vector } x \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

5. (a) Probar que si N_1 y N_2 son normas en \mathbb{R}^n entonces $N = N_1 + N_2$ también lo es.

(b) Deducir que $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \max(|x|, |y|)$ es una norma en \mathbb{R}^2 y verificar que $N(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1) = 1$.

(c) Dibujar el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) = 1\}$.

6.(a) Demostrar que la equivalencia entre normas verifica la propiedad transitiva: si N_1 y N_2 son normas equivalentes, y lo mismo ocurre con N_2 y N_3 , entonces N_1 y N_3 son normas equivalentes.

(b) Probar que si dos normas N_1 y N_2 son equivalentes entonces, dada una bola B_{N_1} (definida con la primer norma) existen dos bolas B_{N_2} y B'_{N_2} (definidas con la segunda norma) tal que $B_{N_2} \subset B_{N_1} \subset B'_{N_2}$.

(c) Probar que $x_n \rightarrow x$ en N_1 si y solo si $x_n \rightarrow x$ en N_2 .

7. Probar que si N es una norma en \mathbb{R}^n (es decir, una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} que verifica los tres axiomas de norma) se cumple:

(a) $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. Interpretar geoméricamente, si N es la norma euclid-eanda.

(b) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_k) = N(x)$. ¿Es cierto el recíproco?

8. Demostrar que el límite de una sucesión en \mathbb{R}^n , cuando existe, es único.
9. (a) Demostrar que una sucesión en \mathbb{R}^n es convergente si y sólo si son convergentes sus sucesiones coordenadas.
- (b) Demostrar que una sucesión en \mathbb{R}^n está acotada si y sólo si están acotadas sus sucesiones coordenadas.
- (c) Una sucesión (x_k) en \mathbb{R}^n no tiene subsucesiones convergentes si y sólo si $\|x_k\| \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).
- (d) Probar que si una sucesión tiene límite, todas sus subsucesiones tienen el mismo límite.
- (e) Probar que si una sucesión es tal que toda subsucesión tiene una subsucesión convergente a un mismo límite, la sucesión original tiene ese límite.
10. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en \mathbb{R}^2 :

$$a_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n}\right), \quad b_n = (e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n), \quad c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right).$$

11. Se definen los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y > 0\}$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$$

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

$$A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$$

$$A_7 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + e^{-n}, n \geq 1\} \cup \{(-1, 0)\} \cup \{A_1 \cap Q^2\}$$

$$A_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

$$A_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$$

- (a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.
- (b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.
- (c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
- (d) Indicar si son abiertos
- (e) Indicar si son cerrados.

12. Probar los siguientes resultados.

(a) Si A es un conjunto abierto y $x \in A$ entonces $A \setminus \{x\}$ es abierto.

(b) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$.

(c) $\overset{\circ}{A} = \bar{A} - \partial A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el “mayor” conjunto abierto incluido en A).

(d) A es cerrado sii $\partial A \subset A$ sii $A' \subset A$.

(e) $\bar{A} = A \cup \partial A$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el “menor” cerrado que contiene a A).

(f) A' es un conjunto cerrado.

13. Hallar todos los puntos de acumulación del conjunto

$$S = \left\{ \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \right) : n, m, p \text{ y } q \text{ naturales tales que } m < n \text{ y } p < q \right\}.$$

14. Demostrar que un punto a es de acumulación de un conjunto X sii existe una sucesión $(x_k) \subset X \setminus \{a\}$ que converge a a .

15. La idea de este ejercicio es mostrar que todas las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes.

(a) Observar, mediante el ejercicio 6.(a), que basta demostrar que una norma cualquiera $(\|\cdot\|)$ es equivalente a la norma de la suma $(\|\cdot\|_1)$.

(b) Sea $\alpha = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}$, entonces

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \leq \alpha \|x\|_1$$

siendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n .

(c) Resta probar que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq \beta \|x\|.$$

Suponer que $\forall m \in \mathbb{N}$ existe $x_m \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_m\|_1 > m \|x_m\|$ y llegar a un absurdo.

(Sugerencia: Normalizar según $\|\cdot\|_1$ y utilizar Bolzano-Weierstrass).

16. Veamos que lo demostrado en el ejercicio anterior no es cierto en general. Sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[a, b]$ a valores reales con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de una función por un escalar. En $C([a, b])$ consideremos las siguientes normas:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\} \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

(a) Probar que $\|f\|_2 \leq (b-a)^{1/2} \|f\|_\infty$, $\forall f \in C([a, b])$.

(b) Probar que si $f_k \rightarrow f$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ entonces $f_k \rightarrow f$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

(c) Probar que no es cierto el recíproco de la parte (b) (dar un contraejemplo).

(d) ¿Estas dos normas consideradas son equivalentes?

(e) ¿Es $C([a, b])$ un espacio vectorial de dimensión finita?