# Práctico 5: Aplicaciones diferenciables

**1.** (a) Designemos mediante $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el espacio vectorial de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que la función $|||\ \ |||: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$|||T||| = \sup\{\|T(x)\| \colon \|x\| = 1\},$$

es una norma.
(b) Consideremos dos transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $U\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Demostrar que

$$|||T \circ U||| \leq |||T|||\,|||U|||\,.$$

**2.** (a) Demostrar que la composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.
(b) Demostrar que la composición de dos difeomorfismos es un difeomorfismo.
(c) Consideremos $f\colon U \to V$ con $U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^n$. Demostrar $f$ difeomorfismo implica $f$ homeomorfismo; y que $f$ homeomorfismo implica $f$ biyectiva.
(d) Encontrar una biyección continua que no sea un homeomorfismo, y un homeomorfismo diferenciable que no sea un difeomorfismo.

**3.** Hallar una aplicación diferenciable $f$, y dos puntos $a$ y $b = a + v$ de su dominio tales que no existe $\theta \in (0,1)$ tal que se verifique

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v).$$

**4.** Investigar en cuáles puntos $f$ es localmente invertible y hallar el diferencial de la inversa local en el punto $f(x,y)$.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$.
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.
3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y) = (x \cos y, x \operatorname{sen} y)$.
4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3/3 - 2x^2/5 + 6x - 2$.

**5.** (Examen 10/2/2000) Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(0,0,2)$ a la curva intersección del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ con el cilindro de ecuación $3(z-1)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$.

**6.** Hallar las distancias máximas y mínimas del punto $(1,1,1)$ a la curva intersección del cono de ecuación $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

**7.** Hallar el máximo y el mínimo del volumen de un tetraedro inscrito en la esfera de centro en el origen y radio 1, con dos vértices fijos en $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

**8.** (Examen 4/3/2002) Se considera el subconjunto $G$ de $\mathbb{R}^3$ de los puntos que verifican

$$\begin{cases} 4x + 3y^2 - 4z = 0, \\ z^2 - y = 0. \end{cases}$$

(a) Probar que $G$ es compacto.
(b) ¿Hay puntos singulares en $G$ (es decir, puntos en los cuales el diferencial de $(3y^2 + 4x^2 - 4z, z^2 - y)$ no tiene rango máximo)?
(c) Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = 4xy + 4z - 1.$$

Hallar el máximo y el mínimo absoluto de la función $f$ en la región $G$.

**9.** (Examen 7/12/2001) Se considera $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = \big(x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1, x^2 - y^2 + z^2\big).$$

Sea $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x, y, z) = (0, 0)\big\}$.
(a) Probar que $C$ es un conjunto compacto.
(b) Hallar la distancias máxima y míinima del punto $(1, 1, 1)$ al conjunto $C$.

**10.** (Examen 10/12/1999) Hallar los extremos absolutos de la función:

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx,$$

en la región definida por:

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 + 2 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(Demostrar que el dominio de $f$ es un conjunto compacto.)

**11.** (Examen 1o./8/2002) Se considera en $\mathbb{R}^3$ el conjunto de $C$ los puntos $(x, y, z)$ que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Admitiendo que $C$ es cerrado y acotado, hallar las distancias máxima y mínima de $C$ al plano de ecuación

$$y + 2z = 0.$$

(b) Probar que $C$ es cerrado y acotado.

**12.** (Examen 21/5/2003) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y + 2z$, y el conjunto $S$ de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifican las condiciones

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

(a) Determinar los puntos críticos de $f$ condicionados a $S$.
(b) Demostrar que $S$ es un conjunto compacto.
(c) Estudiar extremos absolutos de $f$ en $S$.