

**Práctico 4: máximos, mínimos, función implícita y multiplicadores**

1. Hallar el máximo y el mínimo absolutos en todo  $\mathbb{R}^2$  de cada una de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = y^2 + x^4 + y^4$ .

(b)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ .

(c)  $f(x, y) = (ax^2 + by^2) e^{-(x^2+y^2)}$ .

(d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + 1)/(x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3)$ .

2. Hallar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ .

(b)  $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$ .

(c)  $f(x, y) = (x - y + 1)^2$ .

(d)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$ .

(e)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

(f)  $f(x, y) = \text{sen}(x) \text{sen}(y) \text{sen}(x + y)$  en  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ .

3. Hallar  $a, b \in \mathbb{R}$  para que el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

sea mínimo.

4. Estudiar extremos relativos y absolutos de la función  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x, y) = \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle$ , con  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ .

5. Sea  $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$ . Hallar todos sus puntos críticos y clasificarlos. ¿Tiene  $f$  extremos absolutos en todo  $\mathbb{R}^2$ ?

6. Determinar los extremos absolutos y relativos y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2) \text{ en } [0, 1] \times [0, 1].$$

7. Verificar que el campo escalar  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$  tiene un punto estacionario en  $(1, 1, 1)$  y determinar la naturaleza de dicho punto.

8. (Regresión lineal) Dados  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , parejas de números reales, hallar una función  $f(x) = ax + b$  que minimice el "error cuadrático"  $E(a, b)$ , dado por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} (f(x_i) - y_i)^2.$$

9. Sea  $f$  una función diferenciable en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  es homogénea de grado  $p$  en  $U$  si  $f(tx) = t^p f(x) \quad \forall t > 0, x \in U, tx \in U$ .

- (a) Dar una condición para que un polinomio de grado  $p$  en  $n$  variables sea homogéneo de grado  $p$ .
- (b) Probar que para una función homogénea de grado  $p$  se cumple que  $\langle x, \nabla f(x) \rangle = pf(x)$ . Sugerencia: considerar  $g(t) = f(tx)$ .
- (c) Probar que si  $f$  satisface  $\langle x, \nabla f(x) \rangle = pf(x)$  para todo  $x$  en un abierto  $U$  entonces  $f$  es homogénea de grado  $p$  en  $U$ . Sugerencia: considerar  $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$ .
- (d) Si  $f$  es de clase  $C^2$  y homogénea de grado  $p$  en  $\mathbb{R}^2$  probar que  $f$  verifica:

$$x^2 f_{xx}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{yy}(x, y) = p(p-1)f(x, y)$$

**10.** Determinar los conjuntos de nivel y los gradientes de las funciones  $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas mediante  $f(x, y) = ax + by$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ),  $g(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $h(x, y) = x^2 - y^2$ .

**11.** Hacer un croquis del dominio de  $f$  y dibujar los conjuntos de nivel.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f(x, y) = \log \left( \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

**12.** Probar que la ecuación  $xy^2 + 4x^2y - 12 = 0$  determina  $y = f(x)$  alrededor del punto  $(1, 2)$ . Dar la ecuación de las rectas tangente y normal a  $f(x)$  en  $x = 1$ .

**13.** (Ejercicio de examen 10/2/2000) Se considera la ecuación

$$3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 2y^3 - 16 = 0.$$

(a) Probar que existe la función implícita  $y = f(x)$  definida por la ecuación anterior, y que  $f$  puede definirse en toda la recta real.

(b) Hallar los máximos y mínimos relativos de  $f$  y estudiar su comportamiento cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , incluyendo la existencia de asíntotas. Como conclusión, representar gráficamente la función  $f$ .

**14.** Probar que las siguientes ecuaciones determinan  $y = f(x)$  alrededor del punto  $(x_0, y_0)$ , que se indica en cada caso. Calcular  $f'(x_0)$ , y  $f''(x_0)$ .

(a)  $x^2y + \log(xy) = 1$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

(b)  $x + \operatorname{sh}(x) - \operatorname{sen}(y) = 0$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Hallar  $f'''(x_0)$ .

(c)  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , en  $(x_0, y_0)$  genérico con  $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$ ,  $y_0 \neq 0$ . ¿Que ocurre si  $y_0 = 0$ ?

**15.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) \neq 0$ , tal que  $(x^2 + y^4)f(x, y) + (f(x, y))^3 = 1$ ,  $\forall (x, y) \in U$ . Probar que  $f \in C^\infty$  en  $U$ .

**16.** Demostrar que la ecuación  $e^y + y = e^{-2x} - x$  determina una única función  $y = f(x)$  definida para todo  $x$  real. (Se sugiere estudiar las funciones  $F(y) = e^y + y$ ,  $G(x) = e^{-2x} - x$ .) Hallar  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  y  $f'''(0)$ .

**17.** Sean  $u = (x, y, z)$  y  $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

(a) Mostrar que  $\nabla r$  es un vector unitario y colineal con  $u$ .

(b) Mostrar que  $\nabla r^n = nr^{n-2}u$  ( $n$  entero).

(c) Hallar  $f$  tal que  $\nabla f = u$ .

Aplicación: Se sabe que el campo eléctrico creado por una carga puntual  $Q$  ubicada en  $(0, 0, 0)$ , en el punto  $(x, y, z)$  es  $E(x, y, z) = kQu/r^3$  y que el potencial eléctrico es una función  $V$  tal que  $E = -\nabla V$ . Deducir que el campo eléctrico es perpendicular a las superficies equipotenciales. Hallar el potencial  $V$ .

**18.** Sea  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x, y, z) = axz + x \operatorname{Arctg}(z) + z \operatorname{sen}(2x + y) - 1$  ( $a$  real).

(a) Probar que la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  determina a  $z = f(x, y)$  alrededor de  $(0, \pi/2, 1)$ .

(b) Hallar  $a$  para que  $(0, \pi/2)$  sea un punto crítico de  $f$ .

(c) Calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \pi/2)} \frac{f(x,y) - 1 - 3x^2/2 - 2x(y - \pi/2)}{x^2 + (y - \pi/2)^2}$ .

**19.** Sea  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, z) = x^3 + y^2 + yz$ .

(a) Hallar los puntos  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tales que es posible aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  para despejar  $z = f(x, y)$  en un entorno de  $(a, b)$ .

(b) Calcular el gradiente de  $f$  en el punto  $(1, 1)$ .

**20.** Se define la distancia  $d(A, B)$  entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{R}^2$ , mediante

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\},$$

donde  $\|x\|$  denota la norma euclídeana.

(a) i) Demostrar que si  $A$  es compacto,  $B$  es cerrado, y son disjuntos ( $A \cap B = \emptyset$ ), entonces  $d(A, B) > 0$ .

ii) Sea  $A \subset U$ ,  $A$  compacto,  $U$  abierto. Demostrar que existe  $r > 0$  tal que para todo  $x \in A$  se verifica  $B(x, r) \subset U$ .

(b) Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ ,  $0$  un valor regular de  $f$ , y  $S = f^{-1}(0)$  la superficie de nivel  $0$  de  $f$ . Si  $p \notin S$  y existe un  $q \in S$  tal que  $d(\{p\}, S) = \|p - q\| > 0$ , demostrar que  $p - q \perp T_q S$ .

(c) Sea además  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ ,  $0$  valor regular de  $g$ , y  $V = g^{-1}(0)$ . Supongamos que existen dos puntos  $p \in S$  y  $q \in V$  tales que  $d(S, V) = \|p - q\| > 0$ . Demostrar que  $T_p S = T_q V$ .

**21.** (a) Determinar los extremos absolutos de la función  $f(x, y) = ax + by$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) condicionados a  $x^2 + y^2 = 1$

(b) Determinar los extremos absolutos de la función  $g(x, y, z) = ax + by + cz$  ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ) condicionados a  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**22.** Se considera  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = (x + 2y)e^{x+y}$ . Hallar los extremos de  $f$  condicionados a  $x^2 + y^2 = 1$ .

**23.** Consideremos la función  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x, y) = \langle x, y \rangle$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ). Hallar los extremos de  $f$  condicionados a  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$  y deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**24.** (a) Hallar los puntos estacionarios de  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$  en  $\mathbb{R}^2$ . (b) Hallar los puntos estacionarios de  $f$  condicionados a  $x^2 + y^2 + xy = 1$ . (c) Hallar los extremos absolutos de  $f$  condicionados a  $x^2 + y^2 + xy \leq 1$ .

**25.** Hallar extremos absolutos de  $f$  en  $D$ :

(a)  $f(x, y) = xy$  con  $D = \{(x, y): 5x^2 - 6xy + 5y^2 \leq 4\}$ .

(b)  $f(x, y) = e^{(x-1)^2+y^2}$  con  $D = \{(x, y): 2x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**26.** Hallar la máxima y mínima distancia desde el origen a la curva  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ . Hallar además los puntos en los que esta curva tiene tangentes horizontales y verticales.

**27.** Hallar los puntos de la superficie  $z^2 - xy = 1$  más próximos al origen.

**28.** Hallar la mínima distancia del origen de  $\mathbb{R}^3$  al conjunto de puntos  $(x, y, z)$  que verifican la ecuación  $x^2(y + z) + 2x(y^2 - z^2) + 2 = 0$ .