Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2006

Práctico 8.

1. Sea $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   a) Si existen $k > 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $a_{n+1} \geq k a_n$, $\forall n > p$, demostrar que $\lim_n a_n = +\infty$.

   b) Si existen $0 < k < 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $a_{n+1} < k a_n$, $\forall n > p$, demostrar que $\lim_n a_n = 0$.

   c) Demostrar que si $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, entonces $\lim_n a_n = +\infty$ en el caso en que $k > 1$ y $\lim_n a_n = 0$ en el caso en que $0 < k < 1$.

   d) Calcular el límite de las siguientes sucesiones:
   (i) $\left(\frac{n!}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iii) $\left(\frac{n! a^n}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$, $a \neq e$.

2. *a*) Probar que si $\lim_n a_n = 0$, entonces $\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = 0$.

   b) Probar que si $\lim_n a_n = L$, entonces $\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = L$, con $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ o $L = -\infty$.

   c) Probar que si $a_n > 0$ y $\lim_n a_n = L$, entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = L$, con $L \in \mathbb{R}$, $L = +\infty$ o $L = -\infty$.

   d) Probar que si $\lim_n \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$ entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$.

   e) Calcular: $\lim_n \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$ y $\lim_n \sqrt[n]{n!}$.

3. *a*) Hallar una sucesión cuyo conjunto de puntos de adherencia sea el conjunto A, con:
   (i) $A = \{1, 2, 3\}$, (ii) $A = \mathbb{N}$, (iii) $A = [0, 1]$.

   b) Probar que a es punto de acumulación del recorrido de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sí y sólo sí $\forall \epsilon > 0$ y $\forall k \in \mathbb{N}$, existe $n > k$ tal que $0 < |a_n - a| < \epsilon$.

4. Hallar los puntos de aglomeración, el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:
   (i) $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left(n^2(1 + (-1)^n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (iii) $\left(\frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (iv) $\left(1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones.

   a) Probar que

$$\limsup_n a_n = -\liminf_n (-a_n) \text{ y } \liminf_n a_n = -\limsup_n (-a_n).$$

b) Probar que

$$\liminf_n a_n + \liminf_n b_n \leq \liminf_n (a_n + b_n)$$
$$\leq \limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n,$$

siempre que las expresiones de los extremos no sean de la forma $\infty - \infty$.

c) Hallar $\limsup_n a_n$ y $\liminf_n a_n$ en los siguientes casos:
(i) $(-1)^n$ (ii) $3^{\cos n\pi}$ (iii) $n^{(-1)^n}$.

d) Probar que si $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Ejercicio de discusión

1. Sea $\alpha(n)$ la cantidad de números primos que dividen a n. Probar entonces que $\lim_n \frac{\alpha(n)}{n} = 0$.