Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2006

Práctico 7.

1. Probar que si $\lim_n x_n = a$ entonces $\lim_n |x_n| = |a|$. Dar un contraejemplo que muestre la proposición recíproca es falsa salvo si $a = 0$.

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_n x_n = 0$. Se define $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $\lim_n y_n = 0$.

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que sus subsucesiones $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.
Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

4. *a*) Sean $k \in \mathbb{N}$ y a un real positivo. Si $a \leq x_n \leq n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluir que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.
   b) Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, un polinomio de grado k. Mostrar que $\lim_n \sqrt[n]{P(n)} = 1$.

5. *a*) Probar que, para todo $r \in \mathbb{Q}$, se verifica que $\lim_n (1 + \frac{r}{n})^n = e^r$.
   b) Probar que $\lim_n \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b)$, $a, b \geq 0$.

6. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$.
   a) Probar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.
   b) Determinar $\alpha = \lim x_n$.

7. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:
$$a_0 = \sqrt{3}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n},\ \forall n \geq 0$$
Demostrar que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente. Deducir que converge y calcular su límite.

8. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:
$$x_0 = a > 0$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1},\quad \forall n \geq 0$$

(a) Demostrar que es creciente pero que no tiene límite finito.
(b) Calcular $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$.
(c) Para $a = 0$ encontrar una fórmula explícita para x_n.

9. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$x_0 = 0,$$

$$x_{n+1} = \frac{6 + x_n}{6 - x_n}, \quad \forall n \geq 0$$

Demostrar que converge y calcular su límite.

10. Mostrar que, para que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no contenga una subsucesión convergente es necesario y suficiente que $\lim_n |x_n| = +\infty$.

1. Ejercicios de discusión

1. Dada una sucesión: ¿es siempre posible encontrar una subsucesión creciente o drecreciente?

2. *a*) ¿Qué se puede decir de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si es convergente y cada uno de sus términos es entero?

   b) Hallar todas las subsucesiones convergente de la sucesión:

$$(1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

   c) Dada la sucesión:

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, ...)$$

   determinar los reales que son límite de alguna subsucesión.