Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2006

Práctico 6

1. Calcular las siguientes integrales mediante el método de fracciones simples:
$\int \frac{dx}{x^2-1}$, $\int \frac{3\,dx}{x^2-4}$, $\int \frac{2x}{x^2-x-2}\,dx$, $\int \frac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2-8x}\,dx$, $\int \frac{2-3x}{x^2-6x+9}\,dx$,
$\int \frac{x^2-1\,dx}{(x-1)^2(x+3)^2}$, $\int \frac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2(x-2)}\,dx$, $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx$.

2. (a) Hallar todas las primitivas de las siguientes funciones:
$$\frac{3x^3-10x^2-x}{(x^2-1)^2},\quad \frac{1-5x}{x^3-x},\quad \frac{x^2}{x^2+4x+3},\quad \frac{x^3+x^2-3}{x^2-x-2}.$$
   (b) Calcular:
$$\int_{-1}^{0} \frac{3x+2}{x^2-3x+2}\,dx \qquad \int_{2}^{3} \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx$$
$$\int_{4}^{2} \frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx$$

3. *Área encerrada entre los gráficos de dos funciones.* Dadas dos funciones f y g continuas en un intervalo $[a,b]$, el conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ limitado por las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$, y por las rectas $x=a$ y $x=b$ tiene área y vale:
$$\text{Área de C} = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$
Hallar el área de las siguientes regiones del plano encerradas entre los gráficos de las funciones:
   (a) $f(x) = \exp^{x-1} - 1$ y $g(x) = 1-x^2$ en el intervalo $[0,2]$.
   (b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en el intervalo $[2,4]$.
   (c) $f(x) = 0$ y $g(x) = x^2+x-2$ en el intervalo $[-1,2]$.

4. *Longitud del gráfico de una función.* Sea f una función de clase $C^{(1)}$ en un intervalo $[a,b]$.
   (a) Dada la partición $P_n = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a,b]$, donde $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $\forall j = 0,1,\ldots,n$, se define
$$L_n := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2 + (f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}.$$
   Interpretar geométricamente la suma L_n. Probar que existen puntos $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ tales que $\hat{x}_i \in [x_{i-1},x_i]$ y $L_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\hat{x}_i)^2}$.

(b) Probar que existe $\lim_{n\to\infty} L_n$ y que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Este es el valor que definimos como *longitud del gráfico de f en* $[a,b]$.

(c) Calcular la longitud de la circunferencia de radio r.

(d) Calcular la longitud del gráfico de $f(x) = 5 - \sqrt{x^3}$ en $[1,4]$ y de $g(x) = 1 + 6\sqrt[3]{x^2}$ en $[-8,-1]$.

5. *Volumen de revolución I: con respecto al eje Ox.* Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$. El volumen del sólido generado al girar la función f respecto al eje Ox es $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

   (a) Justificar la fórmula dada para el volumen razonando de manera similar a lo hecho para definir la integral de Riemann en un intervalo.

   (b) Calcular el volumen de un cono recto de revolución

   (c) Calcular el volumen obtenido al girar la región acotada por las gráficas de las funciones $g(x) = x^4$ y $h(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$.

   (d) Calcular el volumen del sólido generado al girar la elipse $4x^2+y^2 = 1$.

6. *Volumen de revolución II: con respecto al eje Oy.* Sea f una función no negativa de clase $C^{(1)}$ en un intervalo $[a,b]$, con $a \geq 0$. Sea $P_n = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. El volumen del sólido generado al girar la función f respecto al eje Oy es $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.

   (a) Mostrar que la fórmula dada se deduce de aproximar los volúmenes engendrados al girar con respecto al eje $0y$ la función f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, considerando cilindros concéntricos de altura $f(x_i)$.

   (b) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ respecto del eje $0y$ desde $x = 1$ hasta $x = a$.

   (c) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar una circunferencia que no corta al eje $0y$ con respecto a dicho eje.