

Práctico 5

DERIVABILIDAD

1. Probar que si f es derivable en a , entonces es continua en a .
2. Bosquejar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua que no sea derivable en un conjunto infinito de puntos.
3. Estudiar derivabilidad en 0 de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{x=0} \end{cases}$$

,

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{x=0} \end{cases}$$

4. Sea $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Calcular $f'(x)$. (Sugerencia: utilizar binomio de Newton).
5.
 - a) Sea f tal que $|f(x)| \leq x^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable en 0.
 - b) Supongamos que $|f(x)| \leq |g(x)| \forall x \in \mathbb{R}$. Dar condiciones a g para que f sea derivable en 0.
 - c) Sea f tal que $|f(x)| \leq x^\alpha \forall x \in \mathbb{R}$. Determinar qué $\alpha \in \mathbb{R}$ hacen que f sea derivable en 0.
 - d) Sea $0 < \beta < 1$. Demostrar que si $|f(x)| \geq x^\beta$, $f(0) = 0 \Rightarrow f$ no es derivable en 0.
6. Sea $f(x) = xg(x)$, g continua en 0. Probar que f es derivable en 0.
7.
 - a) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales positivos x e y tales que $x + y = s$, el valor de $x^2 + y^2$ es mínimo cuando $x = y$.
 - b) Probar que entre todos los rectángulos de perímetro dado el de mayor área es el cuadrado.
 - c) En la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay que inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima. Resolver el problema y dar el valor de dicha área máxima.
 - d) Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados del rectángulo miden 12 y 18 centímetros.
8. Se dice que f es Lipschitz de orden α en x_0 si existe una constante K tal que $|f(x_0) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ para todo y en el dominio de f .
 - a) Probar que si f es derivable en x , entonces f es Lipschitz de orden 1 en x . Se cumple el recíproco?
 - b) Si f es Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en $[a, b]$, entonces es constante.
9. Usando la regla de la cadena es posible derivar algunas funciones. Calcular la derivada de:
 - a) x^α para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, (Sugerencia: Considerar $e^{\alpha \log x}$),
 - b) a^x ,
 - c) $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales.
10. Supongamos que $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$ existen (donde $f^{(n)}(a)$ es la derivada n -ésima de f en a). Probar la *fórmula de Leibnitz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_k^n f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a),$$

donde $C_k^n = n!/(n-k)!k!$.

INTEGRALES

11. a) Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:
- $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{y } F(x) = \int_0^x f(t) dt. \text{ Bosquejar los gr\u00e1ficos de } f \text{ y } F.$$
- b) Sea $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in [-1, 0] \cup [2, 4]$ y $f(x) \geq 4$, para todo $x \in [0, 2]$.
- 1) Probar que $\int_{-1}^4 f(x) dx \geq 14$.
 - 2) Si adem\u00e1s se sabe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \in [1, 3]$, hallar $m \in \mathbb{R}$ tal que $14 < m < \int_{-1}^4 f(x) dx$.
- c) Sea f una funci\u00f3n continua en $[2, 8]$ tal que $\int_2^8 f(x) dx = 20$ y $\int_8^4 f(x) dx = 12$.
- 1) Calcular $\int_2^4 f(x) dx$.
 - 2) Probar que existe $c \in [2, 4]$ tal que $f(c) = 16$. \u00c3Existe $d \in [2, 8]$ tal que $f(d) = -1$?
12. a) Calcular las primitivas de las siguientes funciones:
- $$\begin{aligned} f_1 &= 3x^2 - x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} & f_2 &= \frac{6x - 5\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} & f_3 &= \frac{1}{x+1} \\ f_4 &= 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 2 \cos(x) & f_5 &= \frac{1}{(x+1)^5} & f_6 &= \frac{2x}{x^2+1} \\ f_7 &= \frac{1}{1+x^2} & f_8 &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$
- b) Calcular las siguientes integrales:
- $$\begin{aligned} \int_1^2 f_1(x) dx & \quad \int_1^4 f_2(x) dx & \quad \int_0^1 f_3(x) dx & \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_4(x) dx \\ \int_1^7 f_5(x) dx & \quad \int_{-1}^1 f_6(x) dx & \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} f_7(x) dx & \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_8(x) dx. \end{aligned}$$
13. a) C\u00e1lculo la derivada de las siguientes funciones:
- $$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{3 + \operatorname{sen}(t)} dt & G(x) &= \int_0^{x^2} \frac{1 + \sqrt{t}}{2 + t} dt \\ H(x) &= \int_{2x+5}^3 e^{1-t} \operatorname{sen}(t) dt & I(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4} dt \end{aligned}$$
- b) Se consideran las siguientes funciones definidas en todo \mathbb{R} :
- $$J(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x) - \frac{x}{x^2+1} \quad L(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt.$$
- Calcular $J'(x)$, $L'(x)$, $J(1)$ y $L(1)$. Deducir la relaci\u00f3n entre J y L en $[0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$.
14. Calcular integrando por partes: a) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ b) $\int x \operatorname{sen} x \cos x dx$
- c) $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$ e) $\int \ln x dx$ f) $\int x^3 e^{-x^2} dx$
- g) $\int e^{ax} \cos bx dx$ h) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$ i) $\int x^3 \ln x dx$.
15. Calcular por el m\u00e9todo de sustituci\u00f3n:
- a) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sqrt{4 - \operatorname{sen} 2x} dx$ b) $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(3 + \cos x)^2} dx$ c) $\int_3^8 \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$
- d) $\int x^{n-1} \operatorname{sen}^n x dx$, $n \neq 0$ e) $\int_a^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}$, $a \neq 0$ f) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$
16. a) Probar que $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, y calcular $\int_0^1 x^2 (1-x)^{30} dx$.
- b) Sea f continua. Demostrar que $\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x) dx$, y calcular $\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$.
- c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-1/2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx$, $n \in \mathbb{N}$.
- d) Sea $F(x, a) := \int_0^x \frac{t^p}{(t^2+a^2)^q} dt$, $a > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. Demostrar que $F(x, a) = a^{p+1-2q} F(\frac{x}{a}, 1)$.
17. Encontrar una funci\u00f3n continua y no constantemente nula f tal que

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{f(t) \operatorname{sen} t dt}{2 + \cos t}.$$

18. Recordando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, expresar $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$ en funci\u00f3n de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

- a) Probar que integrales de la forma $\int R(\sin x, \cos x) dx$, donde R es una función racional, pueden ser reducidas mediante la sustitución $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ a integrales de la forma $\int r(u) du$, donde r es también una función racional. Calcular $\int \frac{dx}{\cos x + \sin x}$ y $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos x + \sin x}$.
- b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ y la sustitución $x = a \sin t$. Calcular $\int \frac{x dx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$.
- c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{sh} t$. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.
- d) Idem con $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ y la sustitución $x = a \operatorname{ch} t$. Calcular $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1} dx}{x^2}$.
19. Si se aplica la sustitución $x = \sin t$ a la integral definida $\int_0^\pi t^3 \cos t dt$ resulta $\int_0^\pi t^3 \cos t dt = \int_0^0 (\arcsin x)^3 dx = 0$. ¿Por qué es equivocado este razonamiento?
20. a) Integrando por partes deducir la fórmula
- $$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx, \forall n \geq 2.$$
- b) Hallar una fórmula de recurrencia para $\int \cos^n x dx$.
- c) Calcular: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.
- d) Sea $a_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $\forall n \geq 0$. Probar que $a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 1$, y que $a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\forall n \geq 0$.
- e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \lim_n 2n \left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$, y concluir que $\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}$.
21. Para cada una de las f siguientes, si $F(x) = \int_0^x f$. En qué puntos x es $F'(x) = f(x)$? (Precaución: puede ocurrir $F'(x) = f(x)$ aunque f no sea continua)
- a) $f(x) = 0$, si $x \leq 1$, $f(x) = 1$, si $x > 1$,
- b) $f(x) = 0$, si $x < 1$, $f(x) = 1$, si $x \geq 1$,
- c) $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(x) = 1$ si $x = 1$,
- d) f es la función definida en el ejercicio 6b del práctico 3,
- e) $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = 0$ si $x > 0$,
- f) $f(x) = 1$ si $x = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), $f(x) = 0$ en otro caso.
22. Demostrar que los valores de las siguientes expresiones no dependen de x :
- a) $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$,
- b) $\int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.