

Práctico 2

Sea I un intervalo en \mathbb{R} (o todo \mathbb{R}), y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva (es decir, $f(x) \geq 0 \forall x \in I$). Supongamos que a y b pertenecen a I . Definimos $\int_a^b f(x) dx$ como el área limitada por: el eje horizontal y la gráfica de la función, y las verticales $x = a$ y $x = b$. Llamaremos a $\int_a^b f(x) dx$, la *integral de f entre a y b* .¹

- Calcular $\int_0^\alpha x dx$ y $\int_0^\alpha ax dx$, donde $\alpha, a \geq 0$.
- Calcular $\int_1^2 2 dx$, y $\int_\alpha^{\alpha+1} 2 dx$.
- Calcular $\int_1^2 ax dx$, y $\int_0^1 a(x+1) dx$.
¿Qué podrías decir en general sobre $\int_a^b f(x) dx$ y $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$?
- Calcular $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. (Sugerencia: ¿Cuál es el área del círculo unidad?)²
- Calcular $\int_0^1 x^2 dx$, o por lo menos intentar dar alguna **buena** aproximación (dar alguna mejor, que $0 < \int_0^1 x^2 dx < 1$).³
- Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.
(Sugerencia: Considerar la función $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $A(x) = f(x)(b-a) - \int_a^b f(x) dx$).

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ como en la primera parte. Definimos f^+ (parte positiva de f) y f^- (parte negativa de f) dadas por:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

- Bosquejar el gráfico de la parte positiva y negativa de algunas funciones.
- Probar que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Ahora definimos $\int_a^b f(x) dx$ como $\int_a^b f^+(x) dx - \int_a^b f^-(x) dx$.

(Observar que f^+ y f^- son ambas positivas por lo cual la anterior definición es coherente, y también observar que en el caso de que f sea positiva ésta definición coincide con la que ya teníamos).

- Calcular en función de a y b la siguiente integral: $\int_0^1 (ax+b) dx$.

Se dice que una función es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Bosquejar el gráfico de alguna función par y de alguna impar.
- Calcular $\int_{-1}^1 x^3 dx$, y $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.
- ¿Qué se puede decir en general de $\int_{-a}^a f(x) dx$ cuando es impar?, ¿y cuando es par?
- Calcular $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx$ donde g es par y f impar.

¹En los cursos de secundaria, se deducen fórmulas para calcular áreas de figuras planas simples (como cuadrados rectángulos, círculos, etc.) pero es poco probable que se haya dado una definición formal de área. En general se define el área de una figura plana como la cantidad de cuadrados de lado 1 que caben en la figura. Pero es claro que esta definición no es útil a la hora de calcular por ejemplo el área del círculo. Uno de los objetivos de este curso es dar una "buena" definición de $\int_a^b f(x) dx$.

²En el curso daremos una prueba de que el área del círculo unidad es π .

³Por si a alguien le interesa, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.