Cálculo I, Curso 2006 **Facultad de Ciencias**

Práctico 1

Supremo e Ínfimo

El propósito de esta serie de ejercicios es explorar las propiedades del supremo y el ínfimo de conjuntos. Estos son conceptos de relevancia en el desarrollo del curso, entre otras cosas porque serán necesarios en la definición de integral.

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b$. Probar que si se verifica que:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ b < a + \frac{1}{n} \ \text{ entonces } \ a = b.$$
2. Hallar supremos e ínfimos de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente:
   a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x+1)/(x-2) \leq 0\}$
   b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \cos(n\pi/2), n \in \mathbb{N}\}$
   c) $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$
   d) $A = \{m/n \mid 0 < m < n; m, n \in \mathbb{N}\}$
   e) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} \mid p, q \in \mathbb{N}\}$
3. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$. Se define $A + B = \{a + b \, : a \in A \, , \, b \in B\}$
   Explorar cuanto da la suma de algunos pares de los siguientes conjuntos.
   a) $[0,1]$
   b) $(0,1]$
   c) $(2,3)$
   d) $\mathbb{Q}$
   e) $\mathbb{N}$
4. Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$. Se define $cA = \{c \cdot a \, , \, a \in A\}$. Notamos $-A = (-1)A$.
   Hallar:
   a) $1A$
   b) $-[a,b]$
   c) $(-3)\mathbb{N}$
5. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene extremo superior, probar que $-A$ tiene extremo inferior, calcularlo!.
6. *Propiedad aditiva del supremo*
   Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $C = A + B$. La idea de este ejercicio es mostrar que en el caso en que los dos conjuntos tengan supremo, se tiene la siguiente igualdad
$$\sup C = \sup A + \sup B.$$
   Supongamos que A y B tienen supremo.
   a) Demostrar que $\sup A + \sup B \geq x$ para todo $x \in C$. (Por lo tanto $\sup A + \sup B$ es una cota superior de C.)
   b) Demostrar que dado $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in C$ tal que $\sup A + \sup B - \frac{2}{n} < c_n$.
   c) Concluir de *a*) y *b*) que $\sup C = \sup A + \sup B$.
   d) Obtener un resultado análogo al anterior para el caso en que A y B tengan mínimo.
   (Sugerencia: se puede proceder de igual manera que en las partes anteriores, o se puede optar por usar el ejercicio 4. del práctico.)

DESIGUALDADES

1. *Desigualdad triangular*
   Sean $x, y \in \mathbb{R}$, probar que
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
2. *a*) Demostrar que
$$\text{máx}(x, y) = \frac{x + y + |x + y|}{2}$$
   (Sugerencia: interpretar geométricamente $\frac{x+y}{2}$, $\frac{|x+y|}{2}$)
   b) Hallar una fórmula análoga para el mínimo entre x e y.
3. Demostrar que $x^2 + xy + y^2 > 0$ para todo x, y distintos de 0.
   (Sugerencia: una forma de hacerlo es observar que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.)
4. Sean x e y dos números positivos, probar que la media geométrica $\sqrt{xy}$ es siempre menor o igual a la media aritmética $\frac{x+y}{2}$. Probar también que son iguales si y solo si x e y lo son.