

PRÁCTICO 11

Polinomio de Taylor: el poder de las derivadas.

- §1. Sea $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio de grado n . Pruebe que para $a, x \in \mathbb{R}$ cualesquiera se tiene $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.
- §2. Hacer las gráficas de los primeros 3 polinomios de Taylor en 0 de la función seno.
- §3. Hallar $\sqrt{7}$ con error menor a 0.01 mediante el desarrollo de la función $\sqrt{x+8}$.
- §4. Hallar la serie de Taylor en 0 de una primitiva de la función e^{x^2} .
- §5. Use la igualdad $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ y la fórmula de Taylor para calcular las derivadas sucesivas en el punto $x = 0$ de la función $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
- §6. Calcular la derivada de orden 2001 y 2003 en $x = 0$ de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$.
- §7. (a) Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ en el intervalo I . Suponga que existe $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo x en I y todo n natural. Pruebe que, para $x_0, x \in I$ vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.
 (b) Aplicar el punto anterior para las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ con $x_0 = 0$.
- §8. Sea $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Probar que $f(0) = 0$, $f'(x) = 2xf(x) + 1$, y encontrar la serie de Taylor de f en 0.

Integrales Impropias

- §1. Clasificar las siguientes integrales impropias:
- | | | |
|---|---|---|
| $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ | $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ | $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx (\alpha \in \mathbb{R})$ |
| $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1} dx$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ | $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx (\alpha \in \mathbb{R})$ |
| $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ | $\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{x-1}{x-1}}}{(x-1)^2} dx$ | $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ |
| $\int_0^\pi \frac{\ln(\text{sen } x)}{x} dx$ | $\int_0^{+\infty} e^{-x^2 - \frac{1}{x^2}} dx$ | $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} dx (\alpha \in \mathbb{R})$ |
| $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx$ | $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x} dx$ | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\text{sen}^\alpha x \cos^\beta x} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ |
- §2. (a) Sean f y g funciones derivables en $[a, +\infty)$ tales que $f', g' \in R_a^x, \forall x \geq a$. Supongamos además $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$. Probar que $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$ converge si y sólo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx$ converge.
 (b) Clasificar la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$, y las *integrales de Fresnel*: $\int_0^\infty \text{cos}(t^2) dt, \int_0^\infty \text{sen}(t^2) dt$.
 (c) Clasificar la integral $\int_0^\infty 2t \text{cos } t^4 dt$. (Observar que el integrando no está acotado.)
- §3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes integrales:
- | | | | |
|--|---|---|--|
| $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{x} dx$ | $\int_0^\infty \text{tg} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \right) dx$ | $\int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{(x+\text{cos } x)^\alpha} dx$ | $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \text{cos } x}{x+100} dx$ |
|--|---|---|--|
- §4. Usando el criterio integral clasificar la serie $\sum_{n>2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha (\ln(\ln n))^\beta}$.

- §5. *Criterio de Cauchy.* Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in R_a^x, \forall x \geq a$. Probar que $\int_a^\infty f(t)dt$ converge si y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \geq a$ tal que si $x, x' \geq x_\epsilon$, entonces $|\int_x^{x'} f(t)dt| < \epsilon$.
- §6. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty)$. Mostrar que la integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ es divergente, pero sin embargo se puede calcular el volumen del sólido engendrado al girar la función con respecto al eje $0x$. Dar un ejemplo de una función cuya integral impropia converja pero sin embargo no se pueda calcular el volumen del sólido engendrado al girarla con respecto al eje $0y$.
- §7. (a) Si f es continua en $[0, 1]$, calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$.
 (b) Si f es integrable en $[0, 1]$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$.
- §8. Considérese la función *Gamma*: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, para todo $x > 0$.
 (a) Probar que $\Gamma(n)$ es una integral impropia convergente para todo $n \in \mathbb{N}^*$. (En realidad se puede probar que es convergente y derivable para todo $x > 0$.)
 (b) Encontrar una relación entre $\Gamma(n)$ y $\Gamma(n-1)$.
 (c) Probar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Esto muestra que la función Γ es una extensión del factorial a todos los reales positivos.

Ejercicios de Discusión

- §1. (a) Si a es un número positivo fijo, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{h}{h^2 + x^2} dx = \pi.$$

- (b) Si $f(x)$ es continua en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \pi f(0).$$

- §2. **Fórmula de Stirling.** En este ejercicio se demostrará que $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1 + \alpha_n)$, donde $\alpha_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- (a) Probar que $\int_{k-1}^k \log(x) dx \leq \log k \leq \int_k^{k+1} \log(x) dx \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$ y sumando desde 1 a n , deducir que $n \log n - n \leq \log(n!) \leq (n+1) \log(n+1) - n$.
- (b) Sea $d_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2}) \log(n) + n$. Probar que $d_n - d_{n+1} = (n + \frac{1}{2}) \log(\frac{n+1}{n}) - 1$ y usando el desarrollo de Taylor en 0 de $\frac{1}{2} \log(\frac{1+t}{1-t})$ deducir que d_n es decreciente y que $d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$. Sea $c = \lim d_n$. Deducir que $\lim \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^c$. Sólo resta probar que $c = \log(\sqrt{2\pi})$.
- (c) Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx$. Probar que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ y deducir que $I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}$ y que $I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5 \cdot 3}$.
- (d) Probar que $\lim \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = 1$ y observando que I_n es decreciente, deducir que $\lim \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$.
- (e) Deducir que $c = \log(\sqrt{2\pi})$.