

Práctico 7
Geometría

1. Demostrar que dos vectores $w, v \in \mathbb{R}^3$ verifican $v \cdot u = w \cdot u$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $v = w$.
2. Demostrar que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$:
 - (a) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
 - (b) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.
 - (c) $-\|v - w\| \leq \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$.
3. Sean u, v dos vectores en \mathbb{R}^3 .
 - (a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $(u - v) \perp u$.
 - (b) Hallar $\|v\|$ y $\|v + u\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $\widehat{(u+v)u} = \pi/6$.
4. Dados los vectores u_0 y v , $u_0 \neq 0$, se define el vector $w = \frac{u_0 \cdot v}{\|u_0\|^2} u_0$.
 - (a) Probar que $(v - w) \perp u_0$.
 - (b) Probar que para todo λ real se cumple: $\|v - \lambda u_0\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - \lambda u_0\|^2$.
5. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.
Deducir que si $u \perp v$ entonces $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\|$.
6. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$ si y sólo si $\{u, v\}$ es linealmente dependiente.
7. Investigar si los siguientes conjuntos de \mathbb{R}^3 son ortogonales.
 - (a) $A = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$.
 - (b) $B = \{(1, 0, 1), (2, 1, -2), (1, 2, 4)\}$.
 - (c) $C = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (-1, 1, 2)\}$.
 - (d) $D = \{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.
8. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar que si $v \perp w$ entonces $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.
9. En cada caso hallar $u \cdot v$, $u \wedge v$, $\|u\|$, $\|v\|$ y $\|u \wedge v\|$.
 - (a) $u = (2, 3, 1)$ y $v = (1, -1, 0)$.
 - (b) $u = (1, 0, 4)$ y $v = (2, 1, 0)$.
 - (c) $u = (2, 0, 5)$ y $v = (0, -2, 0)$.
10. (a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (3, 5, 7)$ y es perpendicular al plano α de ecuación $x + y + z = 1$.

- (b) Probar que r es paralela al plano β que pasa por los puntos $(3, -4, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 1, 3)$.
 (c) Calcular la distancia de r a β .

11. Sean $P = (3, 4, 4)$, $Q = (1, 2, 0)$, $R = (5, 10, -12)$, $v = (1, 2, -3)$ y $w = (1, 1, 2)$.

- (a) Hallar $S = r_1 \cap \pi_1$, donde r_1 es la recta que pasa por P y es paralela a v , y π_1 es el plano que pasa por Q y es perpendicular a w .
 (b) Investigar si P , Q , R y S están en el mismo plano.
 (c) Calcular $d(S, \pi_2)$, donde π_2 es el plano que pasa por P y es perpendicular a w .

12. Sean $P = (3, 4, -2)$, $Q = (1, 2, -2)$ y $v = (1, 0, 1)$. Sea r_1 la recta que pasa por P y es paralela a v , y sea π el plano que contiene a r_1 y a Q .

- (a) Hallar la recta r_2 que pasa por Q y es perpendicular a r_1 .
 (b) Calcular $d(M, R)$, donde M es el punto medio de PQ y R es el punto de intersección de r_1 y r_2 .
 (c) Hallar un punto S tal que $d(S, P) = d(S, Q) = d(S, R)$ y $d(S, \pi) = 2\sqrt{3}$.

13. Sean $P = (4, 5, 1)$, $Q = (3, -1, -1)$, $v = (2, -1, -1)$ y $w = (1, -2, 1)$. Sea α el plano por Q y paralelo a v y w .

- (a) Encontrar $P' \in \alpha$ tal que la distancia de P a P' sea igual a la distancia entre P y α .
 (b) Hallar la recta r perpendicular a α que pasa por Q .
 (c) Hallar la recta s paralela a α que pasa por P y corta a r .
 (d) Calcular la distancia entre $r \cap s$ y el punto medio de PQ .

14. Se consideran las siguientes rectas

$$r) \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad s) \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 3\mu \end{cases}$$

- (a) Probar que r y s se cruzan (es decir no se cortan ni son paralelas).
 (b) Hallar la ecuación de un plano que no contenga ningún punto en común con las rectas r y s .

15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle u, v \rangle$ donde $u = (1, 1, 1)$.

- (a) Probar que T es lineal.
 (b) Hallar $S = N(T)$ y hallar $\text{Im}(T)$.
 (c) Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $s \in S$ tales que $v = \lambda u + s$.
 (d) Probar que $S \oplus \langle u \rangle = \mathbb{R}^3$.