

Práctico 6
Transformaciones lineales

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

(a) Probar que

$$\dim(V) = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$$

(b) Sea $U \subset V$ un subespacio. Demostrar que $\dim T(U) = \dim U$ si y sólo si $U \cap N(T) = \{0\}$. Observar que esta igualdad sigue siendo válida en el caso $\dim V = \infty$ y $\dim U < \infty$.

2. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que T es una proyección si y sólo si $\text{Id} - T$ es una proyección. Calcular $N(\text{Id} - T)$ e $\text{Im}(\text{Id} - T)$.

3. Sean T_1, T_2 dos proyecciones. Probar que

(a) $T_1 + T_2$ es una proyección si y sólo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = 0$.

(b) $T_1 - T_2$ es una proyección si y sólo si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = T_2$.

4. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal.

(a) Demostrar que si $T^2 = 0$ entonces $T - \text{Id}$ es invertible.

(b) Demostrar que si $T^n = 0$ para algún $n \geq 1$ entonces $T - \text{Id}$ es invertible.

5. Sean $S : V \rightarrow V$ y $T : V \rightarrow V$ transformaciones lineales que verifican $T^2 = S^2 = 0$, $T \circ S + S \circ T = \text{Id}$.

(a) Demostrar que $V = N(S) \oplus N(T)$.

(b) Demostrar que $N(S) = S(N(T))$ y $N(T) = T(N(S))$.

(c) Demostrar que $\text{Im}(T) = N(T)$ y $\text{Im}(S) = N(S)$.

(d) Deducir de lo probado anteriormente que $\dim N(S) = \dim N(T)$.

6. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal inyectiva.

(a) Definir $S : W \rightarrow V$ transformación lineal que verifique $S \circ T = \text{Id}_V$.

(b) Probar que si S es como en la parte anterior y $w \in W$, entonces $w = w - (T \circ S)(w) + (T \circ S)(w)$. Deducir que $W = \text{Im}(T) \oplus N(S)$.

(c) Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal sobreyectiva, hallar una transformación lineal $R : W \rightarrow V$ tal que $T \circ R = \text{Id}_W$.

(d) Demostrar que en este caso $V = \text{Im}(R) \oplus N(T)$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal no nula. Demostrar que T tiene inversa si y sólo si para toda descomposición de V en suma directa $V = U \oplus W$ vale $T(V) = T(U) \oplus T(W)$.

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos $\gamma : V \rightarrow V^{**}$ como $\gamma(v) = \hat{v}$ donde $\hat{v}(\varphi) = \varphi(v)$ para toda $\varphi \in V^*$. Probar que γ es un isomorfismo lineal.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V . Si $\varphi \in W^*$, probar que es posible encontrar un $\hat{\varphi} \in V^*$ tal que $\hat{\varphi}|_W = \varphi$. Extender el resultado a una transformación lineal $T : V \rightarrow L$, donde L es un espacio vectorial arbitrario.

10. Dado un subconjunto W de un espacio vectorial V , decimos que $\phi \in V^*$ *anula* a W si $\phi(w) = 0$ para todo $w \in W$. Al conjunto $A(W) = \{\phi \in V^* : \phi \text{ anula a } W\}$ se lo llama *anulador* de W .

(a) Probar que $A(W)$ es un subespacio de V^* , y que si $W' \subset W$, entonces $A(W) \subset A(W')$.

(b) Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V (no necesariamente de dimensión finita). Probar que $A(U + W) = A(U) \cap A(W)$. Si V es de dimensión finita, probar que $A(U \cap W) = A(U) + A(W)$.

11. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

- Probar que V es un subespacio de $M_3(\mathbb{R})$.
- Hallar una base de V y deducir su dimensión.
- Hallar las matrices de V que son nilpotentes de orden 2 y aquellas que son invertibles.
- Hallar un isomorfismo de V en \mathbb{R}^3 .

12. Sea $T : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ definida por $T(aX^2 + bX + c) = (5a - b + 5c)X^2 + (-4a + b - 4c)X - 6a + b - 6c$.

- Hallar una base de $N(T)$.
- Probar que $N(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ y deducir que $\mathbb{R}_2[X] = N(T) \oplus \text{Im}(T)$.
- Sean $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] : T(p) = p\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[X] : T(p) = -p\}$.
 - Hallar bases de S_1 y S_2 .
 - Probar que $\mathbb{R}_2[X] = N(T) \oplus S_1 \oplus S_2$.

13. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V y sea $\mathcal{B}^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, donde f_i son transformaciones lineales de V en \mathbb{R} definidas por

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- Demostrar que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es una base de $\mathcal{L} = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal}\}$.
- Demostrar que si W es un subespacio de V generado por $\{v_1, \dots, v_r\}$ y v es un vector cualquiera de V , entonces $v \in W$ si y sólo si $f_{r+1}(v) = \dots = f_n(v) = 0$.

(c) Se considera la siguiente base de \mathbb{R}^4

$$v_1 = (1, 1, 0, 0),$$

$$v_2 = (1, -1, 1, 0),$$

$$v_3 = (0, 1, -2, 0),$$

$$v_4 = (0, 0, -1, 2).$$

Sea W el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por $\{v_1, v_2\}$. Hallar dos funciones:

$$f(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt,$$

$$g(x, y, z, t) = a'x + b'y + c'z + d't$$

tales que $v \in W$ si y sólo si $f(v) = g(v) = 0$.