

Práctico 4

1. (a) Probar que un conjunto formado por dos vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro.
 (b) Probar que un conjunto linealmente independiente no contiene al cero.
2. (a) Probar que si $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ son elementos linealmente independientes de V entonces también lo son x_1, \dots, x_k .
 (b) Probar que si x_1, \dots, x_k son elementos linealmente dependientes de V y y_1, \dots, y_l son elementos cualesquiera de V entonces $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ son linealmente dependientes.
3. En los siguientes casos determinar si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente; en caso de que no lo sea escribir un vector de A como combinación lineal de los restantes:
 - (a) $A = \{(1, -3, 2), (2, -4, 1), (5, 3, 2), (1, -5, 5)\}$;
 - (b) $A = \{(1, 2, 1), (1, 0, -4), (4, 3, -1)\}$;
 - (c) $A = \{(2, 3, 4), (2, 1, -4), (12, 11, -4)\}$;
 - (d) $A = \{(1, -2, m), (3, 0, 2), (2, 1, -5)\}$ (discutiendo según el valor de m).
4. En los siguientes casos determinar si el conjunto $A \subseteq V$ es l.i.
 - (a) $V = C[a, b]$, $A = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$.
 - (b) $V = C[a, b]$, $A = \{f, g\}$ siendo $f(x) = |x - a|$ y $g(x) = |x - b|$.
 - (c) $V = \mathbb{k}[x]_2$, $A = \{x, x^2 + 1, 2x^2 + bx + a\}$ (discutir según a y b).
 - (d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A = \{\sin x, \cos x\}$.
5. Sea $V = \mathbb{k}[x]$. Determinar si $A = \{2, t + 1, t^2 + 1, (t + 1)^2\}$ es linealmente independiente.
6. Sean $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $u, v, x \subseteq V$ tales que $\{u, v\}$ es linealmente independiente y $\{u, x\}$ es linealmente dependiente. En los siguientes casos, determinar si $A \subseteq V$ es linealmente independiente:
 - (a) $A = \{u\}$;
 - (b) $A = \{u, 5v\}$;
 - (c) $A = \{u - v, u + 3v\}$;
 - (d) $A = \{2u - v, -4u + 2v\}$;
 - (e) $A = \{u + v, x\}$;
 - (f) $A = \{u + x, v + x\}$.
7. Sean $A = \{u_1, u_2\}$ y $B = \{v_1, v_2\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial V tales que $A \cup B$ es l.i.. Hallar $z \in V$, sabiendo que z es combinación lineal de los elementos de A y los elementos de B simultáneamente.
8. Averiguar si los siguientes conjuntos A son generadores del espacio V :
 - (a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$;
 - (b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3), (-2, 1, 1)\}$;
 - (c) $V = \mathbb{k}[x]_3$, $A = \{1, 1 + x^2, 1 - x + x^2 + x^3, 4 - x + 2x^2 + x^3\}$;
 - (d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x - 2y - 2z = 0\}$, $A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 3)\}$.
9. En los siguientes casos hallar un subconjunto linealmente independiente maximal del conjunto A ,

(a) $A = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

(b) $A = \{x^2, x^2 - x + 1, 2x - 2, 3\} \subseteq \mathbb{K}[x]$;

(c) $A = \{M_1, M_2, M_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ siendo $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$.

10. Sean V un espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ subconjuntos de V tales que $\langle A \rangle$ coincide con $\langle B \rangle$. Demostrar que A es linealmente independiente si y sólo si B lo es.