

Práctico 3
Sumas directas y transformaciones lineales

1. Hallar $S + T$ y determinar si la suma es directa, siendo S y T los subespacios de \mathbb{R}^3 siguientes:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$.

2. (a) Sea V el espacio de las funciones de $[-a, a]$ en \mathbb{R} . Consideremos las funciones pares y las impares:

$$P = \{f \in V : f(x) = f(-x) \forall x \in [-a, a]\},$$

$$I = \{f \in V : f(x) = -f(-x) \forall x \in [-a, a]\}.$$

Probar que P e I son subespacios y que $V = P \oplus I$.

(b) Sea V un \mathbb{R} -espacio y $j : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $j \circ j = \text{id}_V$. Sean

$$S = \{v \in V : j(v) = v\},$$

$$A = \{v \in V : j(v) = -v\}.$$

Probar que S y A son subespacios y que $V = S \oplus A$.

(c) Deducir la parte (a) y la descomposición de las matrices en suma directa de las simétricas y las antisimétricas de la parte (b).

3. Sean X un conjunto y V un \mathbb{k} -espacio vectorial.

(a) Sea $Y \subseteq X$. Probar que $Y^0 = \{f \in V^X : f|_Y = 0\}$ es un subespacio de V^X . (Nota: si $Y = \emptyset$ se define $Y^0 = V^X$).

(b) Probar que $Y^0 = V^X$ si y sólo si $Y = \emptyset$ y que $Y^0 = \{0\}$ si y sólo si $Y = X$.

(c) Sean $Y, Z \subseteq X$. Probar que $(Y \cup Z)^0 = Y^0 \cap Z^0$ y que $(Y \cap Z)^0 = Y^0 + Z^0$.

(d) Deducir que $V^X = Y^0 \oplus Z^0$ si y sólo si $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = \emptyset$.

4. En los siguientes casos determinar si la transformación T es lineal:

(a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = (x, x)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (y - x, z + y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x^2, x, z - x)$.

(d) $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = f(a)$.

(e) $T : V \rightarrow \mathbb{R}, T(\{a_n\}) = \lim a_n$, donde $V = \{(a_n) : \exists \lim a_n \text{ y es finito}\}$.

(f) $\text{tr} : M_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$, la traza.

(g) $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b], T(f) = f^2$.

(h) $T : \mathbb{k}[X]_n \rightarrow \mathbb{k}[X]_{n+1}, T(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = a_0X + (a_1/2)X^2 + \dots + (a_n/n + 1)X^{n+1}$.

5. Se considera la función $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], D(p) = p'$.

(a) Probar que D es lineal y sobreyectiva.

(b) Hallar $N(D)$.

6. Sean $D : \mathbb{R}[X]_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$, $D(p) = p'$ y $T : \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}[X]_{n+1}$ la transformación del ejercicio 4(h). Probar que $D \circ T = \text{id}$ pero que $T \circ D \neq \text{id}$.

7. Definimos $+$: $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ como $a + b = ab$ (el producto usual de los reales) y \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ como $\lambda \cdot a = a^\lambda$. Probar que $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R} .

8. (a) Sea $D_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$. Probar que $D_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^n$.

(b) Probar que $\mathbb{k}[X]_n \cong \mathbb{k}^{n+1}$.

(c) Probar que $\mathbb{k}^{\{x\}} \cong \mathbb{k}$.

9. Hallar el núcleo y la imagen de las transformaciones del ejercicio 4.

10. Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal y $B \subset \text{Im}(T)$ un subespacio.

(a) Probar que $A = T^{-1}(B)$ es el único subespacio de V tal que $N(T) \subseteq A$ y $T(A) = B$.

(b) Sea $C \subseteq V$ un subespacio. Probar que $A = N(T) \oplus C$ si y sólo si $T(C) = B$ y $T|_C$ es inyectiva.

11. Sean V, W dos espacios vectoriales. Consideremos las funciones $T : V \rightarrow V \times W$, $T(v) = (v, 0_W)$, y $S : W \rightarrow V \times W$, $S(w) = (0_V, w)$.

(a) Probar que T y S son transformaciones lineales inyectivas. Hallar sus imágenes.

(b) Probar que $V \times W = \text{Im}(T) \oplus \text{Im}(S)$.

(c) Sea U un espacio vectorial y $f : V \rightarrow U$, $g : W \rightarrow U$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $R : V \times W \rightarrow U$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{T} & V \times W & \xleftarrow{S} & W \\
 & \searrow f & \downarrow R & \swarrow g & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

es conmutativo.

(c) Sea U un espacio vectorial y $f' : U \rightarrow V$, $g' : U \rightarrow W$ dos transformaciones lineales. Probar que existe una única transformación lineal $Q : U \rightarrow V \times W$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xleftarrow{p} & V \times W & \xrightarrow{q} & W \\
 & \swarrow f' & \uparrow Q & \searrow g' & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

es conmutativo, donde p, q son las proyecciones de $V \times W$ en V y W respectivamente –observar que p y q son transformaciones lineales–.