Práctico 2
Espacios vectoriales

1. Averiguar si las siguientes estructuras $(V,+,\cdot)$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

(a) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, donde las operaciones están dadas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall f,g\in V,$$
$$(\lambda\cdot f)(x)=\lambda f(x),\forall x\in R,\forall\lambda\in R,\forall f\in V.$$

(b) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, donde las operaciones están dadas por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall f,g\in V,$$
$$(\lambda\cdot f)(x)=\lambda+f(x),\forall x\in R,\forall\lambda\in R,\forall f\in V.$$

(c) $V=\{(a_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en $\mathbb{R}\}$, donde las operaciones están dadas por:

$$(a_n)_{n\geq 1}+(b_n)_{n\geq 1}=(a_n^2+b_n^2)_{n\geq 1},$$
$$\lambda\cdot(a_n)_{n\geq 1}=(\lambda a_n)_{n\geq 1}.$$

2. Sea $V=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones punto a punto. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W\subseteq V$ son subespacios de $(V,+,\cdot)$.

(a) $W=\{f\in V\ :\ f(1)=1\}$.

(b) $W=\{f\in V\ :\ f(1)=0\}$.

(c) $W=\{f\in V\ :\ \exists f''(0)\}$.

(d) $W=\{f\in V\ :\ \exists f''(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\}$.

3. Sea V el espacio vectorial de las sucesiones. Averiguar si los siguientes subconjuntos $W\subseteq V$ son subespacios de $(V,+,\cdot)$.

(a) $W=\{(a_n)\in V\ :\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\}$.

(b) $W=\{(a_n)\in V\ :\text{lím}_{n\to\infty}a_n=1\}$.

(c) $W=\{(a_n)\in V\ :\exists\,\text{lím}_{n\to\infty}a_{2n}\}$.

(d) $W=\{(a_n)\in V\ :\#\{n:a_n\neq 0\}<\infty\}$.

4. Sea $(V,+,.)$ un espacio vectorial, W_1, $W_2\subset V$ subespacios. Probar que $W_1\cup W_2$ es subespacio de V si y sólo si $W_1\subset W_2$ ó $W_2\subset W_1$.

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}[x]$?

(a) $W_1=\{f\in\mathbb{R}[x]\ :\ f(0)=0\}$.

(b) $W_2=\{f\in\mathbb{R}[x]\ :\ 2f(0)=f(1)\}$.

(c) $W_3=\{f\in\mathbb{R}[x]\ :\ f(t)=f(1-t)\ \forall t\in\mathbb{R}\}$.

(d) $W_4=\{f\in\mathbb{R}[x]:f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{2i}\}$.

6. Definimos en el conjunto $\Bbbk[x]\times\Bbbk[x]^*$ la siguiente relación : $(f,g)\mathcal{R}(f',g')$ si $fg'-gf'=0$ (se recuerda que $\Bbbk[x]^*=\Bbbk[x]\backslash\{0\}$).

(a) Probar que $\mathcal{R}$ es de equivalencia. Notamos $\Bbbk(x) = (\Bbbk[x] \times \Bbbk[x]^*)/\mathcal{R}$ y $\frac{f}{g} = \mathcal{R}[(f,g)]$.

(b) Probar que $\mathbb{R}(x)$ es un cuerpo con las siguientes operaciones:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)g'(x) + f'(x)g(x)}{g(x)g'(x)},$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)f'(x)}{g(x)g'(x)}.$$

(c) Probar que $\mathbb{R}[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}(x)$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(d) ¿Es $\mathbb{R}[x]$ un $\mathbb{R}(x)$-espacio vectorial?

7. Probar que el conjunto $B_n(\Bbbk) = \{M = (m_{ij}) \in M_n(\Bbbk) : m_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ de las matrices triangulares superiores es un subespacio de $M_n(\Bbbk)$.

8. Probar el siguiente resultado:

Sea V un espacio vectorial y $\{W_i : i \in I\}$ una familia de subespacios. Los subespacios son linealmente disjuntos si y sólo si para todo $j \in I$ tenemos que $W_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} W_i = \{0\}$.

Este resultado está probado parcialmente en las notas.

9. Calcular la suma de los siguientes subespacios y decir si es directa:

(a) $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$, donde
$W_1 = \{(x,0,z,0) \in \mathbb{R}^4\}$, $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w = 0\}$.

(b) $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^4$, donde
$W_1 = \langle (2,0,2,0) \rangle$, $W_2 = \langle (1,0,-1,0), (1,1,1,1) \rangle$, $W_3 = \langle (0,1,2,1) \rangle$.

Ejercicios complementarios

10. Averiguar si las siguientes estructuras $(V, +, \cdot)$ son espacios vectoriales.

(a) $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, donde las operaciones están dadas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 - y_2),$$
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y).$$

(b) $V = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, donde las operaciones están dadas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, 0).$$

11. Si V y W son $\Bbbk$-espacios vectoriales, probar que $V \times W$ es un espacio vectorial con la siguiente estructura:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\lambda \cdot (v_1, w_1) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot w_1).$$

12. Se define la *traza* de una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ como $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.
Sea $V = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$. Probar que V es un subespacio de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.