Práctico 1
Conjuntos

1. Si A, B, C son conjuntos, probar que:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. En el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + x = x(x+1)$
(b) $x^2 + x + 1 = 0$
(c) $2x - 3 = 7$

3. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de un conjunto A, probar las leyes de De Morgan

(a) $(\cup_{i\in I} A_i)^c = \cap_{i\in I} A_i^c$.
(b) $(\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I} A_i^c$.

4. Si A y B son dos conjuntos, probar que $\{A \cap B, A \setminus B\}$ es una partición de A.

5. Si A, B son subconjuntos de un tercer conjunto C, probar que la *diferencia simétrica* $(B \setminus A) \cup (A \setminus B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. Sea $\mathcal{R}$ la relación $\leq$ de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, es decir $a \,\mathcal{R}\, b$ si y sólo si $a \leq b$. Determinar si $\mathcal{R}$ es:

(a) reflexiva;
(b) simétrica;
(c) transitiva;
(d) relación de equivalencia.

7. Si $n \in \mathbb{N}^*$ se define la siguiente relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$

$$a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow (a - b) \text{ es dividido por } n \ .$$

Muestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y determine sus clases.

8. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Hallar la preimagen de un elemento $a \in \mathbb{R}$. Hallar $\operatorname{Im} f$.
(b) Sea $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Hallar la imagen de g.
(c) Hallar la imagen de $g \circ f$.

9. Sean A un conjunto, $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A y $\pi : A \to A/\mathcal{R}$ la proyección canónica. Probar que si $J \subset A/\mathcal{R}$ es un subconjunto, entonces $\pi^{-1}(J)$ es una unión de clases de equivalencia.

10. Probar que una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si es invertible. Este resultado está parcialmente probado en las notas del curso.

11. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(a, b)\, \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \ .$$

Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

12. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$, $D = \{3,4,5\}$ y $E = \{3,5\}$. Indicar cuáles de estos conjuntos pueden ser X, si X satisface una de las siguientes condiciones.

(a) X y B son disjuntos.
(b) $X \subseteq D$ y $X \nsubseteq B$.
(c) $X \subseteq A$ y $X \nsubseteq C$.
(d) $X \subseteq C$ y $X \nsubseteq A$.

13. Teniendo en cuenta que $B \setminus C = B \cap C^c$, demostrar que

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
(b) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

14. En el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación $\mathcal{Q}$ de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2)\, \mathcal{Q} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \ .$$

Probar que $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia y determinar la clase asociada al par $(1, -1)$.