

Práctico 9

1. Sea (E, d) un espacio métrico, y $A, B \subset E$ disjuntos.
 - (a) Probar que si A es compacto y $x \in E$, entonces existe $y \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, A)$. Probar con un ejemplo que esto no es necesariamente cierto si A es cerrado y no compacto.
 - (b) Probar que si A es compacto y B es cerrado, entonces $d(A, B) > 0$. Probar con un ejemplo que esto no es necesariamente cierto si A y B son cerrados pero ninguno es compacto.
 - (c) Si A y B son compactos, probar que existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $d(A, B) = d(x, y)$.
2. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y K_1, K_2 subconjuntos compactos de X . Probar que existen abiertos disjuntos $U_i \subset X$ tales que $K_i \subset U_i$ para $i = 1, 2$.
3. Sean (E, d_E) y (F, d_F) espacios métricos y $f : E \rightarrow F$ una función continua. Probar que f es uniformemente continua si E es compacto.
4. Sea (X, τ) un espacio topológico.
 - i) Probar que la unión finita de subespacios compactos de X es compacta.
 - ii) Probar que la intersección de dos conjuntos compactos puede no ser compacta.
5. Probar que un espacio métrico compacto y localmente conexo tiene un número finito de componentes conexas. Probar con ejemplos que las dos hipótesis son necesarias.
6. Sea (E, d) un espacio métrico compacto y $f : E \rightarrow E$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, $\forall x, y \in E, x \neq y$. Probar que f tiene un único punto fijo. (Sugerencia: considerar, si no hay puntos fijos, la función $F(x) = \frac{d(f^2(x), f(x))}{d(f(x), x)}$.)
7. (a) Sean E un espacio vectorial normado de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ o \mathbf{C} y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de E .
Sea $\phi : \mathbf{F}^n \rightarrow E$, $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_i \alpha_i v_i$, donde se considera el espacio \mathbf{F}^n con la topología inducida por la norma $\|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\| = (\sum_i |\alpha_i|^2)^{1/2}$.
 - i. Probar que ϕ es continua.
 - ii. Sea $S^{n-1} = \{\alpha \in \mathbf{F}^n : \|\alpha\| = 1\}$. Probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \cap \phi(S^{n-1}) = \emptyset$ y deducir que existe $\delta > 0$ tal que $\|\phi(\alpha)\| \geq \delta \|\alpha\|$ para todo $\alpha \in \mathbf{F}^n$.
 - iii. Probar que ϕ es un homeomorfismo. Concluir que todas las normas en un espacio de dimensión finita inducen la misma topología y que todos los espacios normados de dimensión finita son completos.

- (b) Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normado completo de dimensión infinita. Probar que su dimensión no es numerable. (Sugerencia: probar que los subespacios de dimensión finita son nunca densos en E .)
8. Probar que la bola cerrada de radio uno en $C([0, 1])$ es acotada y cerrada, pero no es compacta. (Sugerencia: considerar una sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n(x) = 1$, si $x \leq \frac{1}{n+1}$, $f_n(x) = -1$, si $x \geq \frac{1}{n}$.)
9. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \rightarrow M$ continua. Probar que existe $X \subset M$ compacto y no vacío tal que $f(X) = X$. (Sugerencia: considerar $X = \bigcap_n f^n(M)$.)
10. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \rightarrow M$ (no necesariamente continua) tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.
- (a) Sea $\{m_i\}$ una sucesión de naturales. Probar que existe una sucesión creciente $\{n_i\}$ tal que $n_i = m_{k_i} - m_i$
- (b) Dados $x \in M$ y una subsucesión convergente $\{f^{m_k}(x)\}$ de $\{f^n(x)\}$, donde $\{m_k\}$ es creciente, sea $\{n_i\}$ como en la parte anterior. Probar que $\{f^{n_i}(x)\}$ converge a x .
- (c) Probar que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.
- (d) Probar que f es un homeomorfismo sobre sí mismo.

Para la aprobación del curso se deberá entregar resuelto el ejercicio 5 antes de la clase práctica (8:00-10:00am) del 27 de junio.
