

Práctico 8

1. Sean M y N espacios métricos, $f : M \rightarrow N$ continua y $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq c d(x, y)$ para todo $x, y \in M$. Probar que f lleva subespacios completos de M en subespacios completos de N . Deducir que f es cerrada si M es completo.
2. Sean E y F espacios métricos
 - (a) Probar que la completación de $E \times F$ es el producto de sus completaciones.
 - (b) Probar que si E y F son isomorfos también lo son sus completaciones.
3. Probar que l^1 es completo.
4. Una red $\{T_e\}_{e \in D}$ en un espacio métrico (M, d) es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $e_0 \in D$ tal que $d(T_e, T_f) < \epsilon$ si $e, f \geq e_0$. Probar que toda red de Cauchy converge si M es completo.
5. El soporte de una función $f : A \rightarrow \mathbf{C}$ es el conjunto $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$. Sea $C_c(\mathbf{R})$ el conjunto de funciones continuas de \mathbf{R} en \mathbf{C} cuyo soporte es cerrado y acotado, con la distancia del supremo. Hallar la completación de $C_c(\mathbf{R})$.
6. Sea E un espacio métrico completo, y $f : E \rightarrow E$ tal que f^p es una contracción para algún $p \in \mathbf{N}$ (el producto indica composición). Probar que f tiene un único punto fijo $a \in E$, y que éste es un atractor, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$, para todo $x \in E$.
7. i) Probar que si A es nunca denso su frontera también lo es. ii) Si $A \subset B \subset X$ y A es magro en B , probar que A es magro en X .
8. Un subconjunto P de un espacio topológico se llama *perfecto* si es igual al conjunto de sus puntos de acumulación.
 - (a) Probar que un espacio métrico perfecto y completo no es numerable.
 - (b) Dar un ejemplo de un espacio métrico perfecto numerable.
9. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de un espacio métrico completo M en \mathbf{R} tal que $\lim_n f_n(x)$ existe para todo $x \in M$. Sea $f(x) = \lim_n f_n(x)$.
 - (a) Probar que existen un conjunto abierto V y $K \in \mathbf{R}$ tales que $|f_n(x)| \leq K$ para todo $x \in V$.
 - (b) Sean $\epsilon > 0$ y V como en la parte anterior. Probar que existe un entero n_0 tal que $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ si $x \in V$ y $n \geq n_0$.
10. Sea C el conjunto de Cantor. Probar que existe $x \in \mathbf{R}$ tal que el conjunto
$$C + x = \{c + x : c \in C\}$$
no contiene ningún racional.

Para la aprobación del curso se deberá entregar resuelto el ejercicio 8 antes de la clase práctica (8:00-10:00am) del 20 de junio.
