Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a la Topología
Primer semestre 2005

Práctico 6

1. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Si $x \in X$ e $y \in Y$ se definen las funciones $f_x : Y \longrightarrow Z$ y $f_y : X \longrightarrow Z$ mediante: $f_x(y) = f(x,y) = f_y(x)$ para todo $y \in Y$, $x \in X$. Probar que si f es continua también lo son f_x y f_y para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Dar un ejemplo que pruebe que el recíproco no vale.

2. Probar con un ejemplo que las proyecciones $p_\alpha : \prod X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ no son necesariamente cerradas.

3. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

   El *gráfico* de f es el conjunto $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Probar que f es continua si y sólo si la función $\phi : X \longrightarrow \mathcal{G}_f$ dada por $\phi(x) = (x, f(x))$ es un homeomorfismo, donde $\mathcal{G}_f$ tiene la topología relativa a la topología producto en $X \times Y$.

4. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Probar que el espacio producto ΠX_i verifica el primer axioma de numerabilidad si y sólo si lo verifica cada X_i y todos los espacios X_i, salvo una cantidad numerable, son indiscretos. Probar el mismo resultado para el segundo axioma de numerabilidad.

5. El *cubo de Hilbert* es el espacio $H = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2_{\mathbb{R}} : 0 \leq x_k \leq 1/k \ \forall k \geq 1\}$ con la métrica relativa a la de $l^2_{\mathbb{R}}$.

   Sea $f : H \longrightarrow \prod_{i=1}^\infty I = I^{\mathbb{N}}$, dada por $f(\{x_n\}) = \{y_n\}$, donde $y_n = nx_n$ e $I = [0,1]$ con la métrica habitual. Probar que f es un homeomorfismo.

6. Sea $X = \prod X_n$, donde $X_n = \{0,1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que X es homeomorfo al conjunto de Cantor. Concluir que el producto de una cantidad numerable de copias del conjunto de Cantor es homeomorfo al conjunto de Cantor.

7. Sean $I = [0,1]$ y $X = I^I$, con la topología producto τ.

   (a) Probar que X es separable.

   (b) Si $t \in I$ sea $f_t : I \longrightarrow I$ dada por $f_t(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t \end{cases}$
   Sea $A = \{f_t : t \in I\}$. Probar que, con la topología relativa, A es discreto y no es separable. ¿Es (X, τ) metrizable?

   (c) Probar que A tiene sólo un punto de acumulación x en X y que $A \cap U^c$ es finito para todo $U \in \mathcal{N}_x$

Para la aprobación del curso se deberá entregar resuelto el ejercicio 5 antes de la clase práctica (8:00-10:00am) del 30 de mayo.
