Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a la Topología
Primer semestre 2005

Práctico 5

1. Sea X un conjunto numerable con la topología de los complementos finitos. ¿Qué sucesiones en X convergen?

2. Sea X un espacio vectorial normado y sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones en X tales que $x_n \to x, \quad y_n \to y$.
   (a) Probar que $x_n + y_n \to x + y$.
   (b) Si λ_n es una sucesión de escalares que converge a λ, probar que $\lambda_n x_n \to \lambda x$.
   (c) Sea $z_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$. Probar que $z_n \to x$.
   (d) Un subconjunto $Y \subset X$ es *convexo* si para todo $x, y \in Y$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in Y$. Probar que la clausura de un conjunto convexo es convexa.

3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $C([0,1])$ (con la norma del supremo).
   (a) Probar que si $\{f_n\}$ converge a f en $C([0,1])$, se tiene que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.
   (b) Sea $\{f_n\}$ la sucesión dada por $f_n(x) = \frac{1}{(x+1)^n}$. ¿Es $\{f_n\}$ convergente en $C([0,1])$?

4. Sea T una red en un espacio topológico.
   (a) Probar que el conjunto de puntos de aglomeración de T es cerrado.
   (b) Probar que T converge a x sii x es de aglomeración de toda subred de T.

5. (a) Sean τ y σ dos topologías en un conjunto X. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
      i. $\sigma \subset \tau$
      ii. Toda red convergente a $x \in X$ en (X, τ) converge a x en (X, σ).
   (b) Sean d y d' métricas en un espacio E. Probar que d y d' son equivalentes si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en E y $x \in E$ se tiene que x_n converge a x en (E, d) si y sólo si x_n converge a x en (E, d').

6. Se considera $\mathbb{R}^2$ dirigido con el orden lexicográfico con respecto al orden habitual en $\mathbb{R}$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la red dada por $T_{(d,e)} = e$, donde $\mathbb{R}$ tiene la topología habitual. Probar que todos los puntos de $\mathbb{R}$ son de aglomeración de T y que T no converge.

7. Sea D un conjunto de la forma $D = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $a_k \neq a_l$ y $b_k \neq b_l$ si $k \neq l$ y $a_k \neq b_l$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que D es un conjunto dirigido con la relación de orden definida por:

$$a_n \leq a_m \text{ sii } n \leq m; \quad b_n \leq a_m \text{ sii } n+1 \leq m \quad \text{ y } b_n \leq b_m \text{ sii } m = n.$$

(b) Sea $T : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a_n) = (1/n, 0)$ y $T(b_n) = (1/n, 1 - 1/n)$, donde $\mathbb{R}^2$ tiene la topología habitual. Probar que T converge a $(0,0)$.

8. Sea $X = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \geq 0, n \geq 0\}$. Si $A \subset X$ y m es un entero positivo, sea $A_m = \{n : (m,n) \notin A\}$.

   Sea $\tau \in \mathcal{P}(X)$ definida así: un subconjunto A de X pertenece a τ si y sólo si $(0,0) \notin A$ o $(0,0) \in A$ y $\{m : A_m \text{ no es finito}\}$ es finito.

   (a) Probar que τ es una topología en X.

   (b) Probar que ninguna sucesión contenida en $X \setminus \{(0,0)\}$ es convergente.

   (c) Probar que existe una sucesión $\{x_n\} \subset X \setminus \{(0,0)\}$ tal que $(0,0)$ es un punto de aglomeración de $\{x_n\}$ pero ninguna subsucesión de $\{x_n\}$ converge a $(0,0)$.

Para la aprobación del curso se deberá entregar resuelta la parte b) del ejercicio 4 antes de la clase teórica (8:00-10:00am) del 12 de mayo.
