

Práctico 4

- Sea  $X$  un conjunto. Probar que:
  - La intersección de una colección cualquiera de topologías en  $X$  es una topología en  $X$ .
  - La unión de dos topologías en  $X$  puede no ser una topología en  $X$ .
- Hallar interior, clausura y frontera de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  con la topología habitual. Determinar si son abiertos y si son cerrados.
  - $A = \{(x, y) : x > 0 \text{ y } y \neq 0\}$ .
  - $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q} \text{ o } y \in \mathbb{Q}\}$ .
  - $C = \{(x, y) : x \neq 0 \text{ y } y = \text{sen } \frac{1}{x}\}$ .
  - $D = \{(x, y) : xy = \frac{1}{n} \text{ para algún entero positivo } n\}$ .
- Sea  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$ . Probar que:
  - $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  y  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
  - Las igualdades  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$  y  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  no son ciertas en general.
  - $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ . Dar un ejemplo en que la inclusión sea estricta.
  - $\overline{A} = A \cup \partial A$  y  $A^\circ = A \setminus \partial A$ .
  - $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$ .
  - un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a su frontera y es abierto si y sólo si es disjunto con su frontera.
- Sea  $(E, d)$  un espacio métrico,  $A \subset E$  y  $x$  un punto de acumulación de  $A$ . Probar que en todo entrono de  $x$  hay infinitos puntos de  $A$ . ¿Es esto cierto en un espacio topológico?
- Sea  $(E, d)$  un espacio pseudométrico. Se define la bola abierta  $B(x, \varepsilon)$  de centro  $x \in E$  y radio  $\varepsilon > 0$  de la misma manera que en un espacio métrico.
  - Probar que si  $d(x, y) = 0$  y  $x \in B(z, \varepsilon)$  se tiene que  $y \in B(z, \varepsilon)$ .
  - Sea  $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset E : A \text{ es unión de bolas abiertas}\}$ . Probar que  $\tau$  es una topología en  $E$  y que  $d$  es una métrica si y sólo si  $(E, \tau)$  es  $T_0$ .
- Sea  $(X, \tau)$  en espacio topológico. Probar que  $(X, \tau)$  es  $T_1$  si y sólo si  $\{x\}$  es cerrado  $\forall x \in X$ .
- Sea  $(X, \tau)$  en espacio topológico.
  - Probar que  $x \in X$  es de acumulación de  $X$  si y sólo si  $\{x\}$  no es abierto.
  - Si además  $X$  es de Hausdorff y tal que todo  $A \subset X$  es abierto o cerrado, probar que  $X$  tiene a lo sumo un punto de acumulación.
- Probar que  $\ell^2 = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$  equipado con la norma  $\|a\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$  es separable.
- Probar que  $\mathcal{S} = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$  es sub-base de una topología  $\tau$  en  $\mathbb{R}$
  - Describir los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados de  $(\mathbb{R}, \tau)$ .
  - Probar que  $(\mathbb{R}, \tau)$  es un espacio  $T_0$  y no es  $T_1$ . ¿Es de Hausdorff?
  - Dar la clausura e interior de los siguientes conjuntos, donde  $x, y, z \in \mathbb{R}$ :
    - $\{x\}$ .
    - $\{x, y\}$  donde  $x \neq y$ .
    - $\{x \in \mathbb{R} : x > y\}$ .

- iv.  $\{x \in \mathbb{R} : x > y, x \notin \mathbb{N}\}$ .
- (e) Probar que  $(\mathbb{R}, \tau)$  es separable, verifica el primer axioma de numerabilidad, pero no el segundo.
10. Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $Y \subset X$  y  $\tau_Y$  la topología relativa en  $Y$ .
- (a) Probar que si  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una base de  $(X, \tau)$ , entonces  $\{B_\alpha \cap Y\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una base de  $(Y, \tau_Y)$ .
- (b) Probar que todo subespacio de un espacio que verifica el segundo axioma también lo verifica.
- (c) Sean  $(E, d)$  un espacio métrico separable y  $F \subset E$ . ¿Es  $(F, d)$  separable?
- (d) Probar que en un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad toda base contiene una subfamilia numerable que también es base.
11. *Topología de los intervalos semiabiertos.* Sea  $\tau$  la topología en  $\mathbb{R}$  que tiene como base  $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Probar que:
- (a) Los elementos de la base son abiertos y cerrados.
- (b)  $(\mathbb{R}, \tau)$  es separable, verifica el primer axioma de numerabilidad, pero no el segundo.
- (c) Si  $A \subset \mathbb{R}$ , entonces el conjunto de puntos de  $A$  que no son de acumulación de  $A$  es numerable.
- (d) Todo subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau)$  es separable.
- (e) Dados  $A \subset \mathbb{R}$  y un cubrimiento abierto  $\{V_\alpha \cap A : \alpha \in I\}$  de  $A$ , donde  $V_\alpha$  es abierto en  $(\mathbb{R}, \tau)$  para todo  $\alpha \in I$ , sea  $U_\alpha$  el interior de  $V_\alpha$  con la topología inducida en  $\mathbb{R}$  por la métrica euclídea, y sea  $C = A \cap \left(\bigcup U_\alpha\right)^c$ . Probar que ningún punto de  $C$  es de acumulación de  $C$  (con la topología  $\tau$ ) y concluir que  $C$  es numerable.
- (f) Probar que todo subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau)$  es de Lindelöf.
12. *Topología de los rectángulos semiabiertos.* Sea  $\nu$  la topología en  $\mathbb{R}^2$  que tiene como base la familia  $\{A \times B\}$ , donde  $\tau$  es la topología en  $\mathbb{R}$  definida en el ejercicio 11. Probar que el conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$  es cerrado, no es separable y no es de Lindelöf. Deducir que  $(\mathbb{R}^2, \nu)$  no es de Lindelöf.

---

Para la aprobación del curso se deberá entregar resuelto el ejercicio 6 antes de la clase teórica (8:00-10:00am) del 28 de abril.

---