CENTRO DE MATEMÁTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA CURSO 2005 - PRÁCTICO 8

- **Ejercicio 1** Sean X_n, Y_n sucesiones de variables aleatorias, X variable aleatoria, a constante, $g(x)$ y $g(x,y)$ funciones reales. Demostrar:

  (a) Si X_n converge en probabilidad a a y $g(x)$ es continua en a, entonces $g(X_n)$ converge en probabilidad a $g(a)$.

  (b) si $g(x)$ es continua en la recta real y X_n converge en probabilidad a X, entonces $g(X_n)$ converge en probabilidad a $g(X)$.

  (c) si $g(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y X_n e Y_n convergen en probabilidad a X e Y respectivamente, entonces $g(X_n, Y_n)$ converge en probabilidad a $g(X,Y)$.

- **Ejercicio 2** *Teorema de Pólya* Sea $F_n(x)$ una sucesión de funciones de distribución, y sea $F(x)$ una función de distribución continua. Demostrar que si $F_n(x) \to F(x)$ para todo x, entonces esta convergencia es uniforme.

- **Ejercicio 3** Sea X_n una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro λ.

  (a) Probar que $\alpha_n = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$ tiende en probabilidad a cero.

  (b) Probar que α_n converge casi seguramente a cero.

- **Ejercicio 4** Sea X_n una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0,a]$. Se desconoce el valor de a, y se desea "estimar" por medio de una variable aleatoria.

  (a) Probar que $\beta_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ tiende en probabilidad a a.

  (b) Probar que $\beta_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ tiende casi seguramente a a.

  (c) ¿qué se puede decir de la sucesión $E(\beta_n)$?

- **Ejercicio 5** En un cuadrado de lado 1 hay una figura de la cual se desea conocer el área. Para ello se toma una sucesión de puntos aleatorios en dicho cuadrado, y se toma la sucesión α_n definida como:

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si el punto cae en la figura} \\ 0 & \text{si el punto cae fuera de la figura} \end{cases}$$

  ¿cómo se podría utilizar esta sucesión para conocer el área de la figura?

- **Ejercicio 6** *Método de Monte Carlo.* Sea $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función no negativa, continua, acotada por una constante a. Se desea estimar $I = \int_0^T f(x)dx$. Consideramos una sucesión de vectores aleatorios independientes (X_k, Y_k) en $\mathbb{R}^2$, con distribución uniforme en $[0,T] \times [0,a]$. Sea la sucesión $Z_k = 1_{\{Y_k \leq f(X_k)\}}$, $k = 1, 2, \ldots$ y definimos $I_N = \frac{aT}{N} \sum_{k=1}^{N} Z_k$.

  (a) Probar que I_N converge casi seguramente a I cuando $N \to +\infty$.

  (b) Hallar el valor esperado de I_N y su varianza.

  (c) Se busca acotar el error $|I_N - I|$. Dado $\delta > 0$, indicar cómo elegir N para que $\sqrt{V(I_N - I)} < \delta$.

  (d) Hallar un estimador para el caso de integrales múltiples. Hallar la varianza, y comparar el orden de ésta con el de la varianza del estimador hallado para el caso de integrales simples.

- **Ejercicio 7** Un ordenador genera números binarios aleatorios de modo que, en cada posición, los números 0 y 1 son elegidos con probabilidades iguales, e independientemente de los de las demás posiciones. Se calcula el promedio α_n de las longitudes de las primeras n rachas. Por ejemplo, si la sucesión comienza de la forma: $0000110111110\cdots$, la variable α_4 tomará el valor $(4+2+1+5)/4$. ¿cómo se comporta α_n cuando n tiende a infinito?

- **Ejercicio 8** Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos, tales que $P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = 2^{-2n-1}$ y $P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$ para cada n. ¿Se cumple que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$ tiende en probabilidad a cero cuando n tiende a ∞?

- **Ejercicio 9** Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos, tales que $P(X_n = n^{1/4}) = P(X_n = -n^{1/4}) = P(X_n = 0) = 1/3$ para cada n. Demostrar, que para esta sucesión es aplicable la ley débil de los grandes números.

- **Ejercicio 10** Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que $P(X_n = n^{\delta}) = P(X_n = -n^{\delta}) = 1/2$ para cada n, donde $\delta < 1/2$. ¿Es aplicable la ley débil de los grandes números a esta sucesión?

- **Ejercicio 11** Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes, con distribución común Piosson de parámetro λ. ¿Cuál es el límite en probabilidad de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$

- **Ejercicio 12** Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias. Probar que si $EX_n \to \alpha$ y $Var(X_n) \to 0$, entonces $X_n \stackrel{(P)}{\to} \alpha$.

- **Ejercicio 13** Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, tales que $X_1 = 0$ y para $j \geq 2$,

$$P(X_j = k) = \begin{cases} 1/j^3 & \text{si } k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j \\ 1 - 2/j^2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

  Probar que $\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{j=1}^{n} X_j \stackrel{(P)}{\to} 0$ cuando $n \to \infty$ si $\alpha > 1/2$.

- **Ejercicio 14** Sea S una secuencia finita de caras y cruces. Demostrar que si una moneda no necesariamente honesta (con probabilidad de cara igual a p, con $0 < p < 1$) es tirada independientemente un número infinito de veces, entonces S aparecerá en la suceción de caras y cruces obtenida, con probabilidad 1.

- **Ejercicio 15** Sea $X_1, X_2, \cdots$ variables aleatorias independientes, tales que X_n tiene distribución uniforme en $[0, a_n]$ donde $a_n > 0$. Demostrar que

  (a) Si $a_n = n^2$, entonces con probabilidad 1, solamente un número finito de las X_n toma valores menores que 1.

  (b) Si $a_n = n$, entonces con probabilidad 1, un número infinito de las X_n toma valores menores que 1.