

**CENTRO DE MATEMÁTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y
ESTADÍSTICA CURSO 2005 - PRÁCTICO 7**

- **Ejercicio 1** Calcular $E(X^k)$ ($k \geq 3$) para una variable aleatoria X con distribución normal estándar. Deducir los momentos de orden k cuando $a = 0$ y $\sigma > 0$.
- **Ejercicio 2** (a) Sea X una variable aleatoria que toma únicamente valores enteros no negativos. Demostrar que $EX = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$. (b) Sea X una variable aleatoria arbitraria. Demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X| \geq n)$.

- **Ejercicio 3** La densidad de la magnitud de la velocidad absoluta de una molécula tiene la forma

$$p(x) = (4x^2/\alpha^3\sqrt{\pi})e^{-x^2/\alpha^2}, \quad x > 0$$

y $p(x) = 0, x \leq 0$ (*Distribución de Maxwell*). Hallar la velocidad media de una molécula y su varianza.

- **Ejercicio 4** Una persona quiere abrir una puerta, y tiene n llaves de las cuales sólo una corresponde a la cerradura. La persona va eligiendo las llaves al azar y probando abrir la puerta. Calcular la esperanza matemática y la varianza del número de intentos en cada uno de los dos siguientes casos: (a) separa las llaves con las que probó abrir la puerta, (b) elige cada vez entre las n llaves.
- **Ejercicio 5** Construir la densidad de una distribución de una variable aleatoria X , tal que (a) $E(X^2) < \infty$, y $E|X|^3 = \infty$, (b) $E|X|^3 = \infty$, y $E|X|^{2+\delta} < \infty$ para cualquier δ positivo, $\delta < 1$, (c) $E|X|^{2+\delta} = \infty$, y $E(X^2) < \infty$ para cualquier $\delta > 0$.

- **Ejercicio 6** Sea X una variable aleatoria, y sea $0 < q < 1$. El *cuantil de orden q* de una variable aleatoria X se denomina a cualquiera de los números κ_q , que cumpla las condiciones $P(X \leq \kappa_q) \geq q$ y $P(X \geq \kappa_q) \geq 1 - q$. El cuantil de orden $1/2$ se denomina mediana. (a) Hallar la mediana de una variable aleatoria con distribución normal con parámetros (a, σ) , y la de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro α . (b) Consideremos una variable aleatoria X con función de distribución dada por $F(x) = 1 - \exp\{-x^b/c\}$ si $x > 0$ y $F(x) = 0$ si $x \leq 0$, donde b y c son constantes positivas (*distribución de Weibull*). Hallar la mediana y los cuantiles de orden q de la variable aleatoria X .

- **Ejercicio 7** Una tropa de N animales es sometido a una análisis para detectar una enfermedad. Cada animal está enfermo con una probabilidad p . El examen es realizado por medio de una análisis de sangre. Dicho análisis puede ser realizado de dos formas: (I) Hacer N análisis, uno por cada animal, (II) Realizar el análisis por grupos, mezclando la sangre de n individuos. Si da negativo, se admite que los n individuos de ese grupo están sanos. Si da positivo, se realiza un análisis para cada uno de ellos. Determinar (a) La probabilidad de que el test para un grupo de n animales de positivo, (b) El valor esperado de la variable ζ , cantidad de tests necesarios bajo el plan (II). (c) ¿Cómo se debería elegir n para minimizar el valor esperado de ζ ?

- **Ejercicio 8** Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , sea A el conjunto de las variables aleatorias tales que $EX^2 < \infty$. En A definimos la relación de equivalencia: X es equivalente a Y si y sólo si $P(X = Y) = 1$. Llamamos $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (o simplemente L^2) al cociente de A con esta relación.

Demostrar que $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ es un producto interno en L^2 . ¿Cuál es la métrica inducida por este producto interno?

- **Ejercicio 9** Denotemos por $\sigma_Z = \sqrt{V(Z)}$. Probar que:

1. $V(X + Y) \leq 2(V(X) + V(Y))$
2. $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_Y$

- **Ejercicio 10** *Desigualdad de Jensen.* Sea $\phi(x)$ una función real con derivada segunda continua y positiva en todos los puntos. (a) Demostrar que $\phi(y) - \phi(x) \geq \phi'(x)(y - x)$ para todo x, y reales cualquiera. (b) Sea X una variable aleatoria tal que existe su esperanza y la de la variable aleatoria $\phi(X)$. Demostrar que $\phi(EX) \leq E\phi(X)$.
- **Ejercicio 11** (a) Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias que converge en media cuadrática, es decir, que existe una variable aleatoria X tal que $E(X_n - X)^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.
 1. Demostrar que converge en media, es decir, $E|X_n - X| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.
 2. Demostrar que $EX_n \rightarrow EX$ cuando $n \rightarrow +\infty$.
 3. Demostrar que $EX_n^2 \rightarrow EX^2$ cuando $n \rightarrow +\infty$. (Sug. utilizar las propiedades del producto interno.)

Encontrar un sucesión de variables aleatorias que converja en media pero no en media cuadrática.

- **Ejercicio 12** *El turista sin memoria.* Un turista desea visitar cuatro ciudades: A, B, C y D. Primero viaja a una ciudad elegida al azar. Si eligió la A, luego elige entre la B, la C y la D. Si esta vez eligió la B, luego elige entre la A, la C y la D (tiene tan mala memoria que sólo recuerda la ciudad en la que está pero no las que ha visitado anteriormente). Hallar cuál es el valor esperado de la cantidad de viajes que realizará hasta visitar las cuatro ciudades.