

**CENTRO DE MATEMÁTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA CURSO 2005 - PRÁCTICO 6**

- **Ejercicio 1** El vector aleatorio tiene distribución discreta, dada por la siguiente tabla:

x/y	0	1	2	3
0	0.2	0	0.1	0
1	0.1	0.2	0.1	0
2	0	0.1	0.1	0.1

- (a) Hallar  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ , y la función de distribución de la variable aleatoria  $X$ . (b) Calcular  $P(Y = 0)$ ,  $P(Y = 1)$ ,  $P(Y = 2)$ ,  $P(Y = 3)$  y hallar la función de distribución de la variable aleatoria  $Y$ . (c) Son independientes  $X$  e  $Y$  ?
- **Ejercicio 2** *Problema de la aguja de Buffon*. Se arroja al azar una aguja de longitud  $2b$  sobre un plano en el que se han trazado líneas paralelas que distan  $2a$  (con  $a > b$ ). Supondremos que la distancia  $X$  del centro de la aguja a la línea más próxima y el ángulo agudo  $Y$  que forma la dirección de la aguja con la de las líneas son variables independientes, respectivamente uniformes en  $[0, a]$  y  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Calcular la probabilidad de que la aguja corte a alguna línea. Proponer un método para obtener una aproximación de  $\pi$ .
  - **Ejercicio 3** Se eligen al azar e independientemente dos valores  $B$  y  $C$  de  $[0, 1]$ , con distribución uniforme. Calcular la probabilidad de que el polinomio  $x^2 + Bx + C$  tenga (a) raíces reales y distintas, (b) una raíz doble, (c) raíces imaginarias.
  - **Ejercicio 4** Las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes, y tienen la misma densidad, exponencial de parámetro  $\alpha$ . (a) Hallar la densidad de la variable aleatoria  $X + Y$ . (b) Hallar las densidades de las variables aleatorias  $M = \max(X, Y)$ ,  $m = \min(X, Y)$ , y demostrar que  $D = M - m$  es exponencial de parámetro  $\alpha$ . (c) Calcular  $P(X = Y)$  y  $P(X \geq Y)$ .
  - **Ejercicio 5** (a) Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ . Hallar la densidad de  $X + Y$ . (b) Hallar la densidad de  $X + Y + Z$  con  $(X, Y, Z)$  con densidad uniforme en el cubo  $[0, 1]^3$ . (c) Qué puede decir de la función densidad de la suma de  $n$  variables aleatorias independientes con densidad uniforme? Es continua?, hasta que orden es derivable?
  - **Ejercicio 6** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con idéntica distribución  $F(x)$ . Sea  $m = \min(X_1, \dots, X_n)$  y  $M = \max(X_1, \dots, X_n)$ . (a) Calcular las distribuciones de  $M$  y  $m$ . (b) Calcular  $P(x \leq m \leq M \leq y)$ . (c) Si  $F(x)$  es absolutamente continua con densidad  $p(x)$  demostrar que  $m$  y  $M$  tienen distribución absolutamente continua y hallar las densidades respectivas.
  - **Ejercicio 7** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes, con distribución común  $F(x)$  absolutamente continua, con densidad  $p(x)$ . Notamos  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  a las mismas variables ordenadas en forma creciente. Así,  $X_{(1)}$  es el mínimo de las variables,  $X_{(n)}$  es el máximo. (a) Son independientes las variables  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ ? (b) Mostrar que la probabilidad de que  $k$  de las  $n$  variables sean menores que  $x$ , y  $n - k$  mayores que  $x$  es  $\binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$ , y deducir que  $P(X_{(i)} \leq x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$ , y que  $X_{(i)}$  tiene densidad dada, para  $x$  real, por  $f_{(i)} = i \binom{n}{i} F(x)^{i-1} f(x) (1 - F(x))^{n-i}$ .
  - **Ejercicio 8** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro  $\alpha$ . Determinar la densidad de  $X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3$ , y demostrar que la densidad de la suma  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  es  $f_n(x) = \alpha^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$ .

- **Ejercicio 9** *Proceso de Poisson.* Consideremos  $X_1, \dots, X_n, \dots$  variables aleatorias con distribución común exponencial de parámetro  $\alpha$ , y tales que para todo  $n$  las  $n$ -úplas  $X_1, \dots, X_n$  son independientes. Notemos  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , las sumas parciales. Definimos para cada  $t \geq 0$ ,  $N(t) = \text{card}\{k : S_k \leq t\}$  es decir, la cantidad de sumas parciales anteriores a  $t$ . (a) Graficar una función posible  $N(t)$  al variar  $t$ . (b) Observando que  $\{N(t) \geq k\} = \{S_k \leq t\}$ , y utilizando el ejercicio anterior, escribir una fórmula mediante una integral para la probabilidad  $P(N(t) \geq k)$ . (c) Observando que  $P(N(t) = k) = P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k - 1)$  y aplicando partes en la parte anterior deducir que  $N(t)$  tiene distribución de Poisson, de parámetro que se determinará.
- **Ejercicio 10** Sea  $(X, Y)$  un vector uniforme en el cuadrado  $[0, 1]^2$ . Sean  $R = (2\ln(1/1 - X))^{1/2}$ ,  $\theta = \pi(2Y - 1)$ . (a) Mostrar que  $R$  tiene densidad dada por  $p(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}$ ,  $r \geq 0$ . (b) Sean  $Z = R\cos(\theta)$ ,  $W = R\sin(\theta)$ . Probar que  $Z$  y  $W$  son variables aleatorias independientes con distribución normal con parámetros  $(0, 1)$ .