CENTRO DE MATEMÁTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA CURSO 2005 - PRÁCTICO 5

- **Ejercicio 1** La variable aleatoria X tiene distribución discreta y toma los valores 0, 1, 2, 4 siendo las probabilidades de estos valores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria y dibujar su gráfico.

- **Ejercicio 2** La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$. Calcular $P(X \leq 0)$, hallar el valor de la constante c, y calcular $P(0 \leq X \leq 1)$.

- **Ejercicio 3** Se arroja sucesivamente una moneda y se describe los resultados por medio de los números $U_1, U_2, \ldots$. Cuando en la n-ésima replicación el resultado es cara, ponemos $U_n = 1$; y en caso contrario, $U_n = 0$. Suponemos que en cada oportunidad, la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{2}$ y que las sucesivas replicaciones son independientes. Llamemos X al número cuya expresión en el sistema binario es
$$0.U_1U_2 \cdots U_n \cdots$$
o bien de manera equivalente, $X = \sum_{n=1}^{\infty} U_n 2^{-n}$. Calcular: (a) $P(X \geq \frac{1}{2})$ (b) $P(X = 0)$ (c) $P(X = 1)$ (d) $P(j2^{-n} \leq X \leq k2^{-n})$ para $j \leq k \leq 2^n$. (e) $P(a \leq X \leq b)$ para $0 \leq a < b \leq 1$, como límite de probabilidades de intervalos de la parte (d) convenientemente elegidos.

- **Ejercicio 4** Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy, con densidad $p(x) = \frac{1}{c(1+x^2)}$. (a) Determinar la constante c. (b) Determinar un intervalo $I = [-h, h]$ tal que $P(X \in I) = 0{,}9$.

- **Ejercicio 5** Sea $G(x)$ con $x \geq 0$ una función monótona decreciente, no nula, que cumple la ecuación funcional $G(x + y) = G(x)G(y)$, para todo $x \geq 0$, $y \geq 0$. (a) Demostrar que $G(x) = e^{-\alpha x}$ para algún $\alpha \geq 0$. (b) Demostrar que si una variable aleatoria T cumple la propiedad de *pérdida de memoria*, $P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$, entonces tiene distribución exponencial.

- **Ejercicio 6** En un esquema de Bernoulli, sea T la variable aleatoria que indica el número de experimentos que se realizan hasta obtener el primer éxito (cuya probabilidad indicamos con p). (a) Calcular $P(T = k)$ para $k = 1, 2, \ldots$ Se dice que T tiene *distribución geométrica* de parámetro p. (b) Demostrar que $P(T > m + n | T > m) = P(T > n)$, para m, n naturales arbitrarios. (c) Sea X con distribución exponencial de parámetro α. Demostrar que $[T] + 1$ tiene distribución geométrica y calcular su parámetro.

- **Ejercicio 7**

  (i) Sea X una variable aleatoria con distribución discreta, que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$. Sea $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, e $Y = \sum_i x_i 1_{A_i}$. Demostrar que $P(X = Y) = 1$.

  (ii) Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria. Definimos para cada n,
  $$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \text{ para } 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n & \text{si } X(\omega) \geq n \end{cases}$$
  Observar que X es una variable aleatoria discreta, y describir el conjunto de valores que toma. Demostrar que para cada ω, $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ y que $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

  (iii) Si $F_n(x)$ es la distribución de X_n, demostrar que $F_n(x) \to F(x)$ si $n \to +\infty$.

- **Ejercicio 8** Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad donde $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ es un conjunto finito. Notamos $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Se define la entropía de P como $H(P) = -\sum_{k=1}^{n} p_k log(p_k)$ (convenimos que $0log0 = 0$). (a) Demostrar que $0 \leq H(P) < +\infty$, y hallar P tal que $H(P) = 0$. (b) Sea P_0 la probabilidad tal que $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Calcular $H(P_0)$ y demostrar que $H(P) \leq H(P_0)$ para toda P.

- **Ejercicio 9** Supongamos que Ω es un conjunto de s símbolos de un cierto alfabeto, que p_k es la frecuencia de aparición del k-ésimo símbolo en un mensaje largo, que suponemos constante, y que P es la probabilidad correspondiente. (a) Calcular la cantidad de mensajes de largo n que respetan las frecuencia anteriores, es decir, donde aparece $n_k = np_k$ veces el símbolo k, para $k = 1, \dots, s$. (b) Sea $I(n)$ el largo mínimo necesario para codificar con dos valores (traducir a un lenguaje de dos simbolos) todos los mensajes calculados en (a). Demostrar mediante la fórmula de Stirling que $\frac{log(2)}{n} I(n) \sim H(P)$. ¿Cuándo un lenguaje es más informativo?

- **Ejercicio 10** *Paradoja de Bertrand* Sea C la circunferencia de centro O y radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda AB de esta circunferencia elegida al "azar" sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto en los siguientes casos:

  (i) Fijamos un punto I en C elegimos un punto M del segmento OI con distribución uniforme, y le asociamos la cuerda AB que pasa por M perpendicular a OI.

  (ii) Fijamos A en C y elegimos B con distribución uniforme en C.

  (iii) Elegimos un punto M en forma uniforme en el círculo, y consideramos la cuerda AB perpendicular a OM por el punto M.

- **Ejercicio 11** (a) La variable aleatoria X tiiene función de distribución $F(x)$ continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. (b) Consideremos una variable aleatoria Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F, tiene función de distribución $F(x)$.

- **Ejercicio 12** Supongamos que la cantidad de huevos que pone un insecto tiene distribución de Poisson con parámetro λ, y la probabilidad de que un huevo se desarrolle es p. Asumiendo independencia para el desarrollo de huevos distintos, mostrar que el número de sobrevivientes tiene distribución de Poisson con parámetro λp.