CENTRO DE MATEMÁTICA - INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA CURSO 2005 - PRÁCTICO 2

- **Ejercicio 1** Sean A, B y C tres eventos cualquiera, verificar las siguientes relaciones:
(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cup B) - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$ (c) $A \cap A = A = A \cup A$ (d) $(A - (A \cap B)) \cup B = A \cup B$ (e) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ (f) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ (g) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- **Ejercicio 2** Demostrar, que cualquiera sean los sucesos A y B las siguientes relaciones son equivalentes: $A \subset B$, $B^c \subset A^c$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ y $A \cap B^c = \phi$.

- **Ejercicio 3** Sean A, B y C sucesos en un espacio de probabilidad. Encontrar expresiones para los siguientes sucesos: (a) Sólo A ocurre (b) Ambos A y B, pero no C ocurren (c) Los tres eventos ocurren (d) Al menos uno de ellos ocurre (e) Al menos dos de ellos ocurren (f) Uno y no más ocurre (g) Dos y no más ocurren (h) Ninguno ocurre (i) No más de dos ocurren.

- **Ejercicio 4** Un blanco se compone de 5 círculos concéntricos con radios $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. El suceso A_k consiste en caer en el círculo de radio r_k. Explicar que significan los sucesos $B = \bigcup_{k=1}^{5} A_k$, $C = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$ y $D = (A_1 \cap A_2)^c$.

- **Ejercicio 5** Un trabajador fabrica distintos productos. Sea A_k, $(k = 1, \ldots, n)$ el suceso consistente en que el producto k es defectuoso. Escribir los sucesos consistentes en: (a) ni uno de los productos es defectuoso, (b) por lo menos uno de los productos es defectuoso. (c) solo uno de los productos es defectuoso.

- **Ejercicio 6** Se tira simultáneamente dos dados equilibrados. Consideramos los sucesos: $A =$"la suma de las caras superiores es par" y $B =$"al menos una de las caras superiores es par". Describir los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$, y calcular sus probabilidades.

- **Ejercicio 7** Demostrar que para cualquier sucesión de sucesos $A_1, A_2, \ldots$ vale la igualdad

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) \cup \ldots$$

- **Ejercicio 8** Se juega un juego tipo Cinco de Oro: hay que acertar 5 números dentro de 36 posibilidades. (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar? (b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar al menos 3 números?

- **Ejercicio 9** Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se eligen tres al azar. Calcular las probabilidades de que: (a) todas las bolas extraidas sean blancas, (b) todas las bolas extraidas sean negras, (c) Se extraiga una bola blanca y dos negras.

- **Ejercicio 10** En una ciudad circulan a billetes de la serie A, b billetes de la serie B, y c billetes de la serie C. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene cinco billetes, tenga algún billete de cada serie? ¿Es posible responder a la pregunta si en vez del número de billetes de cada serie se conocen las proporciones $\alpha = \frac{a}{a+b+c}$, $\beta = \frac{b}{a+b+c}$ y $\gamma = \frac{c}{a+b+c}$?

- **Ejercicio 11** Calcular la probabilidad de que se acepte una partida de 100 unidades, 5 de las cuales están falladas, si se toman de muestra la mitad, y las condiciones para recibirla son contener a lo sumo un $2\,\%$ de fallas.

- **Ejercicio 12** Supongamos que se tiene n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y se selecciona a r (con $1 \leq r \leq n$) de ellos teniendo en cuenta el orden. ¿Cuál es la probabilidad de que uno en particular de éstos elementos sea elegido, si suponemos ambos tipos de selección, con y sin reemplazamiento?

- **Ejercicio 13** Supongamos que tenemos r perosnas distintas, ¿cuál es la probabilidad de que sus fechas de cumpleaños sean todas distintas? (suponemos que el año consta de 365 días).

- **Ejercicio 14** Se tira una moneda hasta que el mismo resultado sea obtenido dos veces consecutivas, es decir hasta que salgan dos caras o dos cruces consecutivas. A cada resultado que requiera tirar n veces la moneda le asignamos la probabilidad $\frac{1}{2^n}$. Describir el espacio muestral. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos: (a) el experimento termina antes de tirar seis veces la moneda. (b) un número par de tiradas es necesario.

- **Ejercicio 15** Supongamos que tres personas a, b y c, juegan un juego tipo ajedrez. Primero juegan a contra b, y c espera. Luego el ganador (no hay empate) se enfrenta a c y el perdedor espera. Así, siguen jugando hasta que el juego termina cuando uno de los tres gana dos veces consecutivas, y es el gran ganador. Describir las posibles secuencias de juegos. Si le asignamos a un juego que consta de k partidos, la probabilidad $\frac{1}{2^k}$ (a) ¿qué pasa con la probabilidad de los juegos que no terminan nunca? (b) Mostrar que la probabilidad de que a gane es $\frac{5}{14}$, que la probabilidad de que b gane es la misma, pero que la probabilidad de que c gane es $\frac{2}{7}$? (c) Mostrar que la probabilidad de que en ó hasta el k-ésimo juego no haya aún ganador, es $\frac{1}{2^{k-1}}$.