Universidad de la República *Análisis Real–Curso 2005*
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

PRÁCTICO 8

1. Sean μ_1, ν_1 medidas σ-finitas sobre $(X_1, \mathcal{M}_1)$, y μ_2, ν_2 medidas σ-finitas sobre $(X_2, \mathcal{M}_2)$, tales que $\nu_1 \ll \mu_1$ y $\nu_2 \ll \mu_2$. Entonces $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$, y
$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

2. Sean $X = [0,1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m = medida de Lebesgue, y μ la medida de conteo sobre $\mathcal{M}$. Mostrar que $m \ll \mu$, pero $dm \neq f d\mu$, para cualquier f. Deducir que μ no tiene descomposición de Lebesgue con respecto a m.

3. Sean ν, ν_1, ν_2 medidas signadas σ-finitas, μ, λ medidas positivas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{M})$.
   a) Si $\nu \ll \mu$ y $g \in L^1(\nu)$, entonces $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$, y $\int_X g d\nu = \int_X g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$ (Sugerencia: probarlo primero para $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{M}$ y ν positiva).
   b) Si α_1,$\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \ll \mu$ y $\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2$ es una medida signada, entonces $\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2 \ll \mu$, y $\frac{d(\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2)}{d\mu} = \alpha_1\frac{d\nu_1}{d\mu} + \alpha_2\frac{d\nu_2}{d\mu}$
   c) Si $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \lambda$, entonces $\nu \ll \lambda$, y $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$.
   d) Si $\mu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$, entonces $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{d\mu/d\lambda}$.

4. Si E es un boreliano de $\mathbb{R}^n$, la *densidad* $D_E(x)$ de E en el punto x se define por
$$D_E(x) = \lim_{r\to 0} \frac{m\big(E \cap B_r(x)\big)}{m\big(B_r(x)\big)}.$$
   a) Probar que $D_E(x) = 1$ para casi todo $x \in E$ y $D_E(x) = 0$ para casi todo $x \in E^c$.
   b) Encontrar ejemplos de conjuntos E y puntos x tal que $D_E(x) = \alpha$ para $0 < \alpha < 1$ o donde el límite no exista.

5. Sea $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{1}{2}(x + \sigma(x))$, donde σ es la función de Cantor (ver el Ejercicio 5 del Práctico 4). Considerar la medida de Lebesgue–Stieltjes definida por g sobre $[0,1]$ (*es decir:* $\mu(\,[0,x)\,) = g(x)$, $\forall x \in (0,1]$). Hallar la descomposición de μ con respecto a la medida de Lebesgue y viceversa.

6. Sean μ, ν medidas complejas, y λ una medida positiva sobre $(X, \mathcal{M})$. Mostrar que $\nu \perp \mu \iff |\nu| \perp |\mu|$, y $\nu \ll \lambda \iff |\nu| \ll \lambda$. Probar también que $\nu(X) = |\nu|(X) \iff \nu = |\nu|$.

7. Supongamos que μ es una medida de Radon sobre X y $f \in L^1(\mu)$. Probar que ν tal que $d\nu = f d\mu$ es una medida de Radon compleja.

8. Supongamos que $I \in C_0(X, \mathbb{R})^*$, y sean I^+, I^- las funcionales positivas construidas en clase tales que $I = I^+ - I^-$. Probar que si μ es la medida de Radon tal que $I_\mu = I$, entonces $I_{\mu^+} = I^+$, $I_{\mu^-} = I^-$.

9. Si μ es una medida de Radon positiva sobre X con $\mu(X) = \infty$, entonces existe $f \in C_0(X)$ tal que $\int f d\mu = \infty$. En consecuencia, cada funcional lineal positiva sobre $C_0(X)$ es acotada.

10. Sean μ una medida de Radon σ–finita sobre X, y $\nu = \nu_1 + \nu_2$ la descomposición de Lebesgue de $\nu \in \mathsf{M}(X)$ con respecto a μ. Probar que ν_1, ν_2 son medidas de Radon.