

PRÁCTICO 7

1. Sea  $X$  un espacio localmente compacto y de Hausdorff, y sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$  (que por lo tanto es localmente compacto con la topología relativa). Si  $\mu$  es una medida de Radon sobre  $Y$ , probar que  $\phi : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\phi(f) = \int f|_Y d\mu$  es una funcional positiva, cuya medida de Radon asociada es  $\nu$  tal que  $\nu(E) = \mu(E \cap Y)$ .
2. Sea  $\mu$  una medida de Radon sobre  $X$ 
  - a) Sea  $N := \bigcup\{V : V \text{ es abierto y } \mu(V) = 0\}$ . Probar que  $N$  es abierto, y que  $\mu(N) = 0$ . El complemento de  $N$  se llama *soporte* de  $\mu$ , y se denota  $\text{supp}(\mu)$ .
  - b) Probar que  $x \in \text{supp}(\mu) \iff \int f d\mu > 0$  para toda  $f \in C_c(X, [0, 1])$  tal que  $f(x) > 0$ .
3. Hallar todas las medidas de Radon sobre  $\mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  con la topología discreta).
4. Sea  $\mu$  una medida de Radon y  $f \in L^1(\mu)$ . Probar que  $\nu(E) = \int_E f d\mu$  es una medida de Radon.
5. Sea  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ , donde  $\mathbb{R}_d$  denota a  $\mathbb{R}$  con la topología discreta.
  - a) Probar que  $f \in C_c(X)$  si y sólo si  $f^y \in C_c(\mathbb{R})$  para todo punto  $y$  y  $f^y = 0$  salvo para una cantidad finita de puntos  $y$ .
  - b) Definimos un funcional positivo en  $C_c(X)$  por

$$I(f) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \int f(x, y) dx,$$

y sea  $\mu$  la medida de Radon inducida en  $X$ . Probar que  $\mu(E) = \infty$  para todo  $E$  tal que  $E \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset$  para una cantidad no numerable de puntos  $y$ .

- c) Sea  $E = \{0\} \times \mathbb{R}_d$ . Probar que  $\mu(E) = \infty$  pero  $\mu(K) = 0$  para cualquier compacto  $K \subset E$ .
6. Sea  $\nu$  una medida signada sobre  $(X, \mathcal{M})$ . Probar que: (a)  $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ ; (b) Si  $f \in L^1(\nu)$ , entonces  $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$ ; (c) Si  $E \in \mathcal{M}$ , se tiene que  $|\nu|(E) = \sup\{|\int_E f d\nu| : |f| \leq 1\}$ .
  7.
    - a) Si  $\nu$  es una medida signada y  $\lambda, \mu$  son medidas positivas tales que  $\nu = \lambda - \mu$ , entonces  $\lambda \geq \nu^+$ , y  $\mu \geq \nu^-$ .
    - b) Si  $\nu_1, \nu_2$ , y  $\nu_1 + \nu_2$  es una medida signada, entonces  $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$ .
  8. Supongamos que  $\nu$  es una medida signada sobre  $(X, \mathcal{M})$ , y  $E \in \mathcal{M}$ . Probar que se tiene:  $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subseteq E\}$ ,  $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subseteq E\}$ , y  $|\nu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^n |\nu(E_i)| : E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M} \text{ son disjuntos, y } E = \cup_{i=1}^n E_i\}$ .
  9. Mostrar que la caracterización de  $\nu \ll \mu$  en términos  $\epsilon - \delta$  puede fallar si  $\nu$  no es finita; considerar por ejemplo  $d\nu = \frac{1}{x} dx$  y  $d\mu = dx$  sobre  $(0, 1)$ , o  $\nu =$  medida de conteo y  $\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n}$  sobre  $\mathbb{N}$ .

ENTREGAR EL EJERCICIO 3 PARA LA CARPETA. PLAZO: 16 DE JUNIO DE 2005.