Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Real–Curso 2005

PRÁCTICO 6

1. *La hipótesis de σ–finitud es necesaria.* Sean $X = Y = [0,1]$ con la σ–álgebra de Borel. Sea μ la medida de Lebesgue en X y ν la medida del conteo en Y. Sea $D = \{(x,y) \in X \times Y \mid x = y\}$. Mostrar que las integrales

$$\iint \chi_D \, d\mu d\nu, \quad \iint \chi_D \, d\nu d\mu, \quad \iint \chi_D \, d(\mu \times \nu)$$

son todas distintas.

2. *La hipótesis $f \in L^+(X \times Y)$ ó $f \in L^1(\mu \times \nu)$ es necesaria.*

   a) Sea $X = Y$ un conjunto no numerable, linealmente ordenado y tal que para cada $x \in X$, el conjunto $\{y \mid y < x\}$ es numerable (por ejemplo: el conjunto de todos los ordinales numerables). Consideremos en dichos conjuntos la σ–álgebra definida en el ejercicio 4 del práctico 1 y sean $\mu = \nu$ definidas por $\mu(A) = 0$ si A es numerable y $\mu(A) = 1$ en otro caso. Sea $E = \{(x,y) \mid y < x\}$. Mostrar que E_x y E_y son medibles para cualquier x, y y que las integrales

$$\iint \chi_E \, d\mu d\nu, \quad \iint \chi_E \, d\nu d\mu$$

   existen y son distintas.

   b) Sean $X = Y = \mathbb{N}$ con la σ–álgebra trivial $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sean $\mu = \nu$ la medida del conteo. Definimos una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ por

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Probar que $\iint |f| \, d(\mu \times \nu) = \infty$ y que las integrales iteradas existen y son distintas.

3. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y $f \in L^+(X)$. Sea $G_f = \{(x,y) \in X \times [0,\infty] : 0 \leq y \leq f(x)\}$. Entonces G_f es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$- medible, y $\mu \times m(G_f) = \int f d\mu$ (Sugerencia: la aplicación $(x,y) \longmapsto (f(x), y)$ es $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$-medible, y $(z,y) \longmapsto z - y$ es continua sobre $\mathbb{R}^2$). Este es el enunciado definitivo del familiar teorema del cálculo que afirma que “la integral de una función es el área debajo de su gráfico”.

4. Enunciar explícitamente los teoremas de Tonelli y de Fubini para el caso en que los espacios de medida son ambos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, siendo μ la medida de contar. Probar que si $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(m,n) = \frac{(-1)^{m+n}}{\log(m+n)}$, entonces $\sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} f(n,m) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} f(n,m)$, aunque f no es integrable.

5. *a*) Mostrar que $\int \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx = \infty$.

   b) Integrando $e^{-xy} \operatorname{sen} x$ con respecto a x y a y, mostrar que $\lim_{b \longrightarrow \infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (En virtud de la parte (a), algún cuidado es necesario al pasar al límite cuando $b \longrightarrow \infty$).

6. Considerar la siguiente versión del teorema de Fubini:

   Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida completos y σ-finitos, y sea $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ la completación de $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$. Si f es una función $\mathcal{L}$-medible tal que (a) $f \geq 0$ o bien (b) $f \in L^1(\lambda)$, entonces f_x es $\mathcal{N}$-medible para casi todo x, y f^y es $\mathcal{M}$-medible para casi todo y, y en el caso (b) f_x y f^y son integrables para casi todos x e y. Además, las funciones $x \longmapsto \int f_x d\nu$ y $y \longmapsto \int f^y d\mu$ son medibles, y en el caso (b) también integrables, y

   $$\int f d\lambda = \int\int f(x,y) d\mu(x) d\nu(y) = \int\int f(x,y) d\mu(x) d\mu(y).$$

   Demostrar este teorema probando los siguientes hechos:

   a) Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ y $\mu \times \nu(E) = 0$, entonces $\nu(E_x) = \mu(E^y) = 0$, para casi todos x e y.

   b) Si f es $\mathcal{L}$-medible y $f = 0$ en ctp, entonces f_x y f^y son integrables para casi todos x e y, y $\int f_x d\nu = \int f^y d\mu = 0$ para casi todos x e y (Aquí la completitud de μ y de ν es necesaria).

   c) Si f es $\mathcal{L}$-medible, existe g, $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible tal que $f = g$ ctp-λ (Fue probado en clase).

7. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida, no necesariamente σ-finitos. Mostrar que si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathcal{M}$-medible, $g : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathcal{N}$-medible, y $h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $h(x,y) = f(x)g(y)$, entonces h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-medible, y que si $f \in L^1(\mu)$, $g \in L^1(\nu)$, entonces $h \in L^1(\mu \times \nu)$, y $\int h d(\mu \times \nu) = (\int f d\mu)(\int g d\nu)$.

8. Si f es integrable Lebesgue en $(0, a)$ y $g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt$, entonces g es integrable en $(0, a)$, y $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

$\boxed{\text{ENTREGAR EL EJERCICIO } 2b \text{ PARA LA CARPETA.}}$ PLAZO: 2 DE JUNIO DE 2005.