Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Real–Curso 2005

Práctico 5

1. Calcular los siguientes límites justificando los cálculos:

   a) $\lim_n \int_0^\infty n \operatorname{sen}(x/n)\big(x(1+x^2)\big)^{-1} dx$.

   b) $\lim_n \int_0^\infty \big(1+(x/n)\big)^{-n} \operatorname{sen}(x/n) dx$.

   c) $\lim_n \int_0^\infty (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} \operatorname{sen}(x/n) dx$.

   d) $\lim_n \int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1} dx$ (La respuesta depende de que a sea positivo, nulo, o negativo). Comparar con los varios teoremas de convergencia vistos.

   e) $\lim_n \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)^n}{1+f(x)^n} dx$, donde $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ es integrable.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ una función integrable, y definamos $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Probar que F es continua.

3. Probar que si $\mu(X) < \infty$, $(f_n) \subset L^1(\mu)$ y $f_n \to f$ uniformemente, entonces $f \in L^1(\mu)$ y $\int f_n \to \int f$.

4. Sea μ la medida de conteo sobre $\mathbb{N}$. Interpretar el Lema de Fatou, el teorema de convergencia monótona y el teorema de convergencia dominada como teoremas acerca de series infinitas.

5. *a*) Sea $f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $f(\cdot,t) : X \to \mathbb{C}$ es integrable para cada $t \in [a,b]$. Sea

   $$F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

   Supongamos que existe $\partial f/\partial t$ y que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $\big|(\partial f/\partial t)(x,t)\big| \leq g(x)$ para todo x,t. Probar que F es derivable y que

   $$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x).$$

   b) Probar que $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$ derivando la ecuación $\int_0^\infty e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$.

   c) Mostrar que $\lim_n \int_0^n x^k (1-x/n)^n dx = k!$.

6. Deducir las siguientes fórmulas desarrollando en serie los correspondientes integrandos e integrando luego término a término. Justificar cada paso.

   a) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos ax dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2/4}$ $(a > 0)$.

   b) $\int_0^1 x^p (x-1)^{-1} \log x dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(p+k)^2}$, $(p > -1)$.

7. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas que converge ctp a la función medible f.

   a) Probar que si Si $f_n, g_n, f, g \in L^1$, $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en casi todo punto, $|f_n| \leq g_n$, y $\int g_n \to \int g$, probar que $\int f_n \to \int f$.

   b) Supongamos que $\int f = \lim \int f_n$. Si $\int f < \infty$, entonces para cada conjunto medible E se tiene $\int_E f = \lim \int_E f_n$. Mostrar que el resultado es en general falso si $\int f = \infty$.

   c) Supongamos que $f_n, f \in L^1$ y $f_n \to f$ en casi todo punto. Probar que $\int |f_n - f| \to 0$ si y sólo si $\int |f_n| \to \int |f|$.

8. Probar que si $f_n \geq 0$ and $f_n \to f$ en medida, entonces $\int f \leq \liminf \int f_n$.

9. Supongamos que $|f_n| \leq g \in L^1$ y que $f_n \to f$ en medida. Probar:

   a) $\int f = \lim \int f_n$.

   b) $f_n \to f$ en L^1.

10. Supongamos que f_n y f son funciones medibles a valores complejos y sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar:

   a) Si φ es continua y $f_n \to f$ en casi todo punto, entonces $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ en casi todo punto.

   b) Si φ es uniformemente continua y $f_n \to f$ uniformemente (casi uniformemente, en medida), entonces $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ uniformemente (casi uniformemente, en medida).

   c) Encontrar contraejemplos para las proposiciones anteriores cuando φ no es continua.

11. *a*) *Lema de Riemann–Lebesgue.* Si f es una función integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\lim \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx dx = 0 = \lim \int_{\mathbb{R}} f(x) \operatorname{sen} nx dx.$$

   (Sugerencia: probarlo primero para funciones escalera).

   b) Sea $n_1 < n_2 < \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos, y sea $E = \{x \in [0, 2\pi] :$ existe $\lim$ $\operatorname{sen} n_k x\}$. Probar que $m(E) = 0$ (Sugerencia: usar (a) y la igualdad $2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$).

12. Sean $\mathsf{r} = \{r_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, y $\phi_{\mathsf{r}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{|x - r_n|}}$, $\forall x \notin \mathsf{r}$, $\phi_{\mathsf{r}}(x) = \infty$ si $x \in \mathsf{r}$.

   a) Probar que ϕ_{r} es integrable sobre todo intervalo acotado, y deducir que ϕ_{r} es finita en casi todo punto.

   b) Supongamos que r es denso en $\mathbb{R}$, y $\psi = \phi_{\mathsf{r}}$ en casi todo punto. Probar que ψ es discontinua en todos los puntos, y no acotada en cualquier abierto no vacío.

   c) Probar que si r es denso en $\mathbb{R}$, entonces ϕ_{r}^2 es no integrable sobre cualquier abierto no vacío.

ENTREGAR EL EJERCICIO 1*a* PARA LA CARPETA. PLAZO: 12 DE MAYO DE 2005.

Ejercicios optativos

13. *Lema de Scheffé.* Sean $f_n \geq 0$ y $f \geq 0$ tales que $\int f_n = \int f = 1$ para todo n. Probar que si $f_n \to f$ en casi todo punto, entonces $f_n \to f$ en L^1.

14. Probar que si e^{ita_n} converge para todo $t \in [-\delta, \delta]$, entonces a_n converge.

15. *Teorema de Lusin.* Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es medible Lebesgue y $\varepsilon > 0$, entonces existe un conjunto $E \subset [a, b]$ tal que $m(E^c) < \varepsilon$ y $f|_E$ es continua. Más aún, E puede tomarse compacto. (*Sugerencia:* usar el teorema de Egoroff.)