

PRÁCTICO 2

1. Sean X un conjunto, y $(E_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{P}(X)$. Definamos:

$$\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \right), \quad \liminf E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \right).$$

Si estos límites coinciden los denotamos simplemente por $\lim E_n$.

- a) Mostrar que $\liminf E_n \subset \limsup E_n$.
 - b) Si (X, \mathcal{M}, μ) es un espacio de medida y $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}$, probar que:
 - 1) $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$.
 - 2) Si $\mu(\bigcup_{n \geq k} E_n) < \infty$ para algún k , entonces $\mu(\limsup E_n) \geq \limsup \mu(E_n)$
 - c) Dar ejemplos que muestren que en (b) las desigualdades pueden ser estrictas.
2. Sea \mathcal{A} la colección de uniones finitas de conjuntos de la forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ o $(a, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, donde $-\infty \leq a < b < \infty$.
- a) Mostrar que \mathcal{A} es un álgebra sobre \mathbb{Q} .
 - b) La σ -álgebra generada por \mathcal{A} es $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
 - c) Definamos μ_0 sobre \mathcal{A} por $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu_0(A) = \infty$ si $A \neq \emptyset$. Entonces μ_0 es una premedida sobre \mathcal{A} , y hay más de una medida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ cuya restricción a \mathcal{A} es μ_0 .
3. Supongamos que μ y ν son dos medidas finitas sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, tales que $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Probar que entonces $\mu = \nu$. ¿Se puede deducir lo mismo sin la hipótesis de finitud?
4. Una medida μ sobre X es llamada σ -finita si $X = \bigcup_{n \geq 1} E_n$, con $\mu(E_n) < \infty$, $\forall n$. Una medida μ es llamada *semifinita* si para todo E tal que $\mu(E) = \infty$ existe $F \subseteq E$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$.
- a) Probar que si μ es σ -finita entonces es semifinita. ¿Vale el recíproco?
 - b) Si $f : X \rightarrow [0, \infty]$ y $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ está dada por $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$, entonces μ es semifinita si y sólo si $f(x) < \infty$, $\forall x \in X$. ¿Cuándo es σ -finita?
 - c) Si μ es semifinita y E es tal que $\mu(E) = \infty$, entonces $\forall a > 0$ existe $F \subseteq E$ tal que $a < \mu(F) < \infty$.
5. Sea $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ la medida exterior de Lebesgue.
- a) Dar un ejemplo de una sucesión disjunta $(E_n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $m^*(\bigcup_n E_n) < \sum_n m^*(E_n)$.
 - b) Dar un ejemplo de una sucesión $(E_n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $E_{n+1} \subseteq E_n$, con $m^*(E_n) < \infty$, $\forall n$, y $m^*(\bigcap_n E_n) < \lim m^*(E_n)$.
6. Sean μ^* una medida exterior sobre X , \mathcal{M} la σ -álgebra de conjuntos μ^* -medibles, $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}}$, y μ^+ la medida exterior inducida por $\bar{\mu}$.
- a) Si $E \subseteq X$, se tiene $\mu^*(E) \leq \mu^+(E)$, con igualdad si existe $A \in \mathcal{M}$ con $E \subseteq A$ y $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.
 - b) Si μ^* es inducida de una premedida, entonces $\mu^* = \mu^+$.

- c) Si $X = \{0, 1\}$, existe una medida exterior μ^* sobre X tal que $\mu^* \neq \mu^+$.
7. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha, y sea μ_F su medida de Borel asociada. Mostrar que se tiene: $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b^-) - F(a^-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a^-)$, y $\mu_F((a, b)) = F(b^-) - F(a)$.
8. Sea $D \subseteq [0, 1]$ denso en $[0, 1]$, y para cada $j = 1, \dots, n$ sea $I_j = (a_j, b_j]$, de forma que $D \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j$. Probar que $\sum_{j=1}^n l(I_j) \geq 1$, donde $l((a, b]) = b - a$. Notar que D podría ser numerable, por ejemplo $D = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, y por lo tanto $m^*(D) = 0$; esto muestra que la medida exterior no se puede definir usando apenas cubrimientos finitos.
9. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida, y sea $M = \{E \in \mathcal{M} : \mu(E) < \infty\}$
- a) Si $E, F \in M$ y $\mu(E \Delta F) = 0$, entonces $\mu(E) = \mu(F)$.
- b) Digamos que $E \sim F$ si $\mu(E \Delta F) = 0$. Probar que \sim es una relación de equivalencia sobre M .
- c) Definamos $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $d(E, F) = \mu(E \Delta F)$. Probar que d es una pseudométrica sobre M . Por lo tanto d pasa al cociente M / \sim , definiendo sobre este conjunto una métrica que continuamos llamando d .
- d) Mostrar que si μ es finita y \mathcal{M} está generado por una familia numerable, entonces M / \sim es separable.
- e) Dar un ejemplo que muestre que el resultado anterior puede ser falso si μ no es finita.

ENTREGAR EL EJERCICIO 2 PARA LA CARPETA

. PLAZO: 14 DE ABRIL DE 2005.

Ejercicios optativos

10. Sea (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{M}$ es llamado un átomo de μ si $\mu(A) > 0$ y para todo $E \subseteq A$ medible se tiene que $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = \mu(A)$. Si μ no tiene átomos se dice que μ es no-atómica. Dar un ejemplo de una medida con exactamente n átomos, $n \in \mathbb{Z}^+$. Probar que si μ es no-atómica, $E \in \mathcal{M}$ y $0 \leq t \leq \mu(E) < \infty$, entonces existe $F \subseteq E$ tal que $\mu(F) = t$.
11. Sean (X, d) un espacio métrico y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ una medida exterior *métrica*, es decir, una medida exterior tal que $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$ siempre que $d(E, F) > 0$.
- a) Probar que si $E \subseteq U \subseteq X$, con U abierto, y si $E_n := \{x \in X : d(x, X \setminus U) \geq 1/n\}$, entonces $\lim_n \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$.
- b) Demostrar que cada boreliano es μ^* -medible.
- c) Recíprocamente, probar si ν^* es una medida exterior sobre X tal que cada abierto en X es ν^* -medible, entonces μ^* es una medida exterior métrica.