Práctico 9.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Ecuaciones en diferencias

1. Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = Rx_n$. A partir de un valor inicial x_0 dado esbozar el gráfico de x_n en los casos: $-1 < R < 0$, $R < -1$, $R = -1$ y estudiar los $\lim_{n\to+\infty} x_n$ y $\lim_{n\to+\infty} x_{2n}$.

2. Esbozar el gráfico de $y = x^2$ y considerando la ecuación en diferencias $x_{n+1} = (x_n)^2$ estudiar –en función de x_0– el $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Mediante una calculadora estudiar la ecuación en diferencias $x_{n+1} = (x_n)^2$ colocando como entradas diferentes valores de x_0.

3. Estudiar la dinámica de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ en los casos en que $f(x) = e^x - 1$ y $f(x) = \arctan(x)$.

4. Estudiar por el método gráfico el comportamiento de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = 1 - (x_n)^2$, comenzando con valores cercanos a 0 y a 1. Realizar el mismo estudio con una calculadora.

5. Para cada $a > 0$ se considera la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = x^3 - ax^2 + a$$

   a) Probar que -1 es un punto fijo de f_a, y hallar los puntos fijos restantes.

   b) Clasificar los puntos fijos de f_a en los siguientes casos:

      1) $a \in (0, 1)$.

      2) $a \in (1, 2)$.

      3) $a = 1$.

   c) Supóngase que $a = 1$, y sean $x_0 = \frac{5}{6}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 0$. Hallar $\lim_n x_n$.

6. *a*) Sea $h(x) = \frac{3x+\alpha}{x+1} - x$. Estudiar el signo de $h(x)$ para $x > 0$ para los valores $\alpha = -1$ y $\alpha = 3$.

   b) Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{3x_n + \alpha}{x_n + 1}.$$

   Determinar los puntos fijos para $\alpha = -1$ y para $\alpha = 3$.

   c) Suponga $\alpha = -1$.

      1) Si $x_0 = 2$ hallar $\lim_{n\to\infty} x_n$.

      2) Si $x_0 = \frac{1}{2}$ determinar si la cantidad x_n se volverá negativa en algún momento.

7. Sea $f(x) = x^2 + \lambda x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   a) Hallar λ para que 1 sea punto fijo de f.

   b) Mostrar que 1 es el único punto fijo de f para el valor de λ hallado en (a).

   c) Si λ es como en (a) y $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall t \geq 0$, usando el método gráfico hallar $\lim_{t\to+\infty} x_n$ cuando $x_0 = 2$ y cuando $x_0 = \frac{1}{2}$.

   d) Probar que para el valor de λ hallado en (a), la función f no tiene 2-ciclos.