Práctico 8.

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
MATEMÁTICA I
Curso 2005

Ecuaciones diferenciales

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   (i) $y'y = x$ (ii) $y'(y+2) = \cos 2x$ (iii) $2(y-1)y' - 3x^2 - 34x = 2$

   (iv) $y^2y' = x^3$ (v) $y' = \frac{1}{(3y^2+y^{1/3})\cos^2 x}$ (vi) $\frac{xy'\operatorname{tg} y}{\cos y} + x^2\cos y = 0$

   (vii) $\frac{-\operatorname{tg} x \cos y}{y' \operatorname{tg} y} = 1$ (viii) $y' = (y-1)(y+1)$ (ix) $yy' = e^{x+2y}\operatorname{sen} x$.

   Hallar en cada caso las soluciones de las ecuaciones anteriores que cumplan respectivamente: (i) $y(3) = -3$; (ii) $y(0) = 1$; (iii) $y(0) = -1$; (iv) $y(\pi/4) = 0$; (v) $y(1) = \pi/4$; (vi) $y(0) = 1$; (vii) $y(0) = 1$; (viii) $y(0) = 1$; (ix) $y(0) = 0$.

2. Un modelo simple para la propagación de una epidemia se basa en la ecuación diferencial $y' = ky(1-y)$, donde $y \in [0,1]$ es la fracción de la población total infectada en el instante t. Hallar $y(t)$ en función de $y_0 = y(0)$. ¿Cómo se comporta $y(t)$ cuando $t \to \infty$?

3. Muchas de las sustancias que se introducen en el organismo (por ejemplo los medicamentos) son eliminados de éste de forma que la concentración del medicamento decrece de manera proporcional a la existente.

   a) Sea $x(t)$ la concentración de una tal sustancia en la sangre en el instante t, y sea x_0 la concentración inicial. Hallar y resolver la ecuación que describe la variación de la concentración.

   b) Se llama tiempo de vida media de una tal sustancia al tiempo T en que la concentración decrece a la mitad de su valor inicial, y se llama concentración media al número $C = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^t x(s)ds$. Hallar T y C.

   c) Muchos de los medicamentos tienen una vida media de seis horas. Hallar en ese caso la constante de proporcionalidad.

4. Se considera una reacción química descrita con el símbolo $A + B \to C$. Esto significa que las sustancias A y B colocadas en contacto reaccionan formando C. Suponemos que las concentraciones iniciales de A y B son iguales (llamaremos a a ese valor) y que la concentración inicial de C es cero. Denotamos por $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ a las concentraciones de las sustancias A, B y C en el instante posterior t. Se supone que la reacción tiene la siguiente propiedad: el número de moles perdidos por A al llegar al instante t coincide con el número de moles perdidos por B al llegar el instante t y ambos producen el mismo número de moles de C. Eso significa que para todo t se tiene $a(t) = b(t)$ y $c(t) = a - a(t)$. La ley de acción de masas dice en este caso que la tasa de formación de C – o sea c' – es el producto de las correspondientes concentraciones de A y B.

   a) A partir de la información anterior establecer y resolver las ecuaciones que permiten calcular las concentraciones.

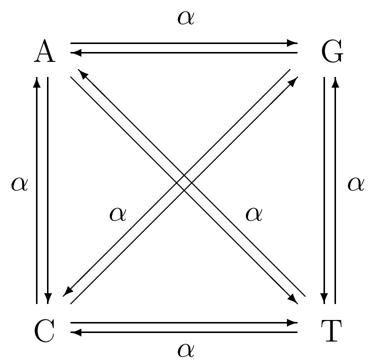
   b) Hallar a si se sabe que al medir la concentración de C diez minutos después de comenzada la reacción se observa que la concentración de C es $a/2$.

5. Suponemos que en un determinado cultivo la población de bacterias se duplica cada 20 horas. Escribir la ecuación diferencial correspondiente y determinar el tiempo en que la densidad es 10 veces la original.

6. Otro modelo asociado al crecimiento de la densidad en un cultivo de bacterias viene dado por la ecuación: $x' = Kxte^{-\alpha t^2}$. Determinar la solución que satisface $x(0) = x_0$ y graficar la función $\ln\big(x(t)\big)$, estudiando su límite en $+\infty$ y hallando su punto de inflexión.

7. *El modelo de Jukes y Cantor.* Se trata de un modelo para la evolución de las cadenas de ADN. En las sucesivas generaciones pueden producirse mutaciones que cambien la base ubicada en un sitio determinado de una cadena de ADN.

   Jukes y Cantor asumen que cada base cambia con la misma probabilidad (α) a cualquiera de las otras tres bases, y que se mantiene incambiada con probabilidad $1 - 3\alpha$ (ver dibujo).
   Si tratamos el tiempo como un continuo, se puede ver muy fácilmente que la función f que indica en cada instante la probabilidad de que un determinado sitio de la cadena sea ocupado por la misma base que lo ocupaba en el instante inicial, satisface la ecuación diferencial.

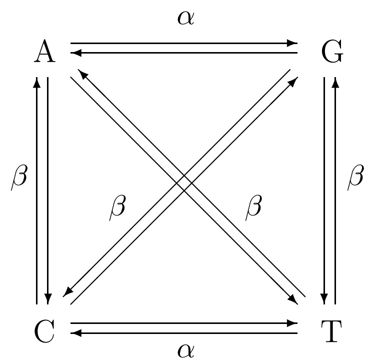


$$f'(t) = -4\alpha f(t) + \alpha$$

   Resolver la ecuación diferencial, teniendo en cuenta la condición inicial $f(0) = 1$.

8. *El modelo biparamétrico de Kimura.* La suposición de Jukes y Cantor de que todos los cambios nucleotídicos tienen la misma probabilidad no se adecua demasiado a la realidad.

   De hecho las transiciones (cambios entre A y G, o entre T y C) son bastante más frecuentes que las transversiones. Motoo Kimura propuso en 1980 un modelo de sustitución biparamétrico en el cual las probabilidades de transición (α) son mayores que las probabilidades de transversión (β). Llamemos f a la función que indica en cada instante la probabilidad de que un determinado sitio de la cadena sea ocupado por la misma base que lo ocupaba en el instante inicial, g a la función que indica en cada instante la probabilidad de que el nucleótido ubicado en ese sitio difiera del nucleótido que lo ocupaba en el instante inicial en una transición, y h la función que indica en cada instante la probabilidad de que el nucleótido ubicado en ese sitio difiera del nucleótido que lo ocupaba en el instante inicial en una transversión específica.



   Por ejemplo, si en el instante inicial se parte de la base A, $f(t)$ indica la probabilidad de que en el instante t el sitio en cuestión sea ocupado por la base A, $g(t)$ indica la probabilidad de que en el instante t el sitio en cuestión sea ocupado por la base G, y $h(t)$ indica la probabilidad de que en el instante t el sitio en cuestión sea ocupado por la base T.
   Se puede demostrar que las funciones f, g y h verifican la ecuación:

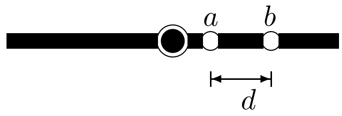
$$f'(t) = -(\alpha + 2\beta)f(t) + \alpha g(t) + 2\beta h(t)$$

   a) Mostrar que las funciones: $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4\beta t} + \frac{1}{2}e^{-2(\alpha+\beta)t}$, $g(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4\beta t} - \frac{1}{2}e^{-2(\alpha+\beta)t}$ y $h(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4\beta t}$ verifican la ecuación de Kimura.

   b) Mostrar que las funciones definidas anteriormente verifican la ecuación $f + g + 2h = 1$, e interpretar este hecho.

9. *La distancia de Haldane.* En 1919 J.B.S Haldane propuso definir la distancia entre dos sitios de un cromosoma en función de la frecuencia de recombinación entre dichos sitios.

Llamemos d a la distancia entre los loci a y b y M a la probabilidad de recombinación entre dichos sitios. Se puede demostrar que la función M satisface la ecuación diferencial $M'(d) = 1 - 2M(d)$.



Resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $M(0) = 0$. Dicha solución expresa la relación entre distancia genética y probabilidad de recombinación entre dos sitios.

10. Considerar la ecuación diferencial $x' = -9x + 3x^3$.

   a) Intentar resolverla por separación de variables.

   b) Graficar la función $-9x + 3x^3$.

   c) Determinar los estados de equilibrio y estudiar su estabilidad. Hallar el $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ para la condición inicial $x(0) = 0,1$.

11. La densidad de una población x está determinada por la ecuación $x' = \dfrac{2x^2}{1+x^3} - x$. Hallar los estados de equilibrio y clasificarlos según su estabilidad. Discutir el comportamiento futuro de la población para valores iniciales 0,001, 0,8 y 10.

12. La siguiente ecuación describe el crecimiento de una poblacion de gusanos que viven a expensas de los abetos en los bosques de Canadá.
La ecuación está dada por: $x' = f(x) - g(x)$, donde $f(x) = R(1 - x/Q)$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, siendo R y Q constantes positivas. La función $f(x)$ indica la salud del bosque, de modo que si R es grande el bosque está pleno de vegetación. Por otro lado, al crecer x la función $f(x)$ disminuye, esto implica que el bosque se ve afectado por el crecimiento de x, lo que a su vez influirá en el decaimiento de x. La función g indica la competencia entre los gusanos.

Figura 1: Un gusano

Tomaremos $Q = 8$ en el resto del ejercicio.

   a) Graficar f y g para $R = 0{,}3$. Demostrar que hay un único estado de equilibrio y estudiar su estabilidad.

   b) Demostrar gráficamente que hay un intervalo (R_0, R_1) de valores de R para los cuales existen 3 estados de equilibrio; estudiar la estabilidad. Para el mínimo R_0 de tales valores hay 2 estados de equilibrio. Determinar si el mayor de ellos es estable o inestable.

   c) Demostrar que el modelo sufre un cambio drástico en las proximidades de $R = R_0$. Por ejemplo estudiar el futuro de la población con condición inicial $x(0) = 10$ suponiendo R apenas menor que R_0 y luego suponiendo R apenas mayor que R_0. Este resultado se interpreta así: existe un valor en que el estado de madurez del bosque provoca un importante avance de la población x. Es decir la población x se mantiene en un cierto nivel mientras el bosque es relativamente inmaduro y crece abruptamente más allá de cierto grado de madurez.