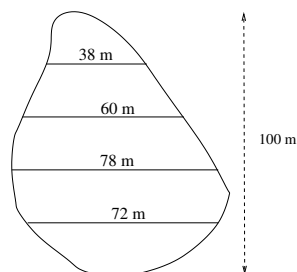


Integración (III): algunas aplicaciones; métodos numéricos;
integrales impropias

- Se hace girar la gráfica de la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alrededor de la recta $y = c$. Entonces el volumen del cuerpo determinado es $V(c) = \pi \int_a^b (f(t) - c)^2 dt$; justificar esta afirmación. Calcular $V(c)$ para $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \sin t$. Hallar c para que $V(c)$ sea mínimo.
- Calcular la longitud del arco de curva dado por los gráficos de las funciones siguientes en los intervalos dados:
 $f(x) = \ln(\cos x)$ en $[0, \pi/4]$; $f(x) = \frac{(x^2+2)^{3/2}}{3}$ en $[0, 3]$; $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}$ en $[0, 2]$.
- Comprobar directamente que $\operatorname{ch}^2 x = (1/2)(1 + \operatorname{ch} 2x)$.
 - Se considera el gráfico de $y = x^2/2$ –que es un trozo de parábola– en el intervalo $[0, 1]$. Expresar la longitud del arco de parábola como una integral.
 - Calcular $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}$ mediante el cambio de variables $x = \operatorname{sh}(t)$.
- Consumo eléctrico.** Supóngase que la razón promedio de consumo de electricidad para cierta casa está modelada por la función $C(t) = 4 - \frac{6}{5} \sin \frac{\pi t}{12}$, donde $C(t)$ se mide en kilovatios y t indica el número de horas después de la medianoche. Determinar el consumo diario promedio para esta casa, medido en kilovatios/hora.
- Mediante la regla de los trapecios estimar el valor de $\int_1^2 x^2 dx$, dividiendo el intervalo $[1, 2]$ en intervalos de longitud $\frac{1}{4}$ cada uno. Comparar el resultado obtenido con el verdadero.
- Se quiere calcular el volumen del estanque representado en la figura.



La profundidad promedio del estanque es de 5 metros. Con un mapa a escala se miden las distancias a través del estanque cada 20 metros, como muestra la figura. Utilizar la regla de los trapecios para estimar el volumen del estanque.

- Clasificar las siguientes integrales impropias: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx$, $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x^2-1} dx$, $\int_e^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $\int_0^{\pi} \frac{\ln(\sin x)}{x} dx$.
- Usando el criterio integral clasificar las series que siguen, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\sum \frac{1}{\ln n}$, $\sum \frac{1}{n \ln n}$, $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum \frac{1}{(\ln n)^\alpha}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$,
- Mostrar que las series $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ y $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ son convergentes y absolutamente convergentes. Integrando por partes mostrar que las integrales $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ y $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ son convergentes (se puede probar que en cambio las integrales $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ y $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ no son convergentes)
- Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty)$. Mostrar que la integral $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ es divergente, pero sin embargo el volumen del sólido engendrado al girar la función con respecto al eje Ox es finito. Calcular dicho volumen.